

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

**FUNÇÃO DE WIGNER DE DOIS MODOS  
AMPLIFICADOS EM UM OSCILADOR  
PARAMÉTRICO ÓPTICO NÃO-DEGENERADO**

**Marcelo Dumas Hahn**

---

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

---

**Orientador: Prof. Dr. Kaled Dechoum**

**NITERÓI - RJ**

**2008**

*Para*

*Fabiana, irmã e amiga,*

*Myriam, mãe e protetora,*

*Renato, pai compreensivo*

*e Ilka, avó coruja.*

“Que a inspiração chegue não depende de mim. A única coisa que posso fazer é garantir que ela me encontre trabalhando.”

*Pablo Picasso*

# Agradecimentos

Para se fazer uma dissertação não bastam apenas o esforço e a dedicação na elaboração do trabalho. É preciso ter o privilégio de contar com um bom orientador, de ter amigos e a oportunidade de conhecer pessoas de boa vontade, que colaboram pelo simples fato de querer ajudar. A todos o meu mais sincero reconhecimento.

Como orientador pude contar com:

**Prof. Kaled Dechoum**, a quem dedico essa citação de Albert Einstein:

*“Não basta ensinar ao homem uma especialidade; porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade.*

*É necessário que se adquira um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto.*

*A não ser assim, ele se assemelhará com seus conhecimentos profissionais, mais a cão ensinado, do que a uma criatura harmoniosa e desenvolvida.*

*Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias, para determinar com exatidão seu lugar em relação ao seu próximo e à comunidade.”*

Como amigos e pessoas solícitas foram tantos e vários foram os serviços que frequentei, involuntariamente poderei esquecer alguém, a estes, minhas desculpas.

Aos meus amigos e confidentes, que nos momentos de desespero estiveram sempre ao meu lado: **André, Antônio Marcos (Tuninho), Jonas, Munique, Rodrigo (Soneca) e Rodrigo.**

Ao exemplo de estudante, por todos os momentos de conversa e por todas as dúvidas tiradas: **Daniel Kiss**

Aos professores do grupo de Óptica Quântica e Informação Quântica pela paciência, críticas e sugestões: **Antônio Zelaquett, Daniel Jonathan, Ernesto Galvão e José Augusto Huguenin.**

Aos estudantes do grupo de Óptica e Informação Quântica pelos momentos que passamos juntos: **Bernardo, Carlos Eduardo, Carolina, Igor e Raphael.**

Aos estudantes que sempre me apoiaram e tiveram a paciência de ouvir meus lamentos (infelizmente são muitos para poder listar todos aqui).

A família **Kattenbach**, que me considera (e eu os considero) de forma especial: **Elza, Gustavo, Louise e Sabine**.

Ao **João** e a **Luana**, secretários da pós-graduação, sempre prestativos e bem humorados.

Ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense que recebe de forma acolhedora todos que desejam se aproximar.

Ao Departamento de Física da Universidade Federal Fluminense onde dei os meus primeiros passos da minha formação acadêmica.

E por último, mas não menos importante, às bibliotecárias, exemplos de dedicação e boa vontade, que fizeram minha vida ser mais fácil tanto quanto possível: **Ana Maria, Irani, Kátia, Léia, Lúcia, Márcia e Rita de Cássia**.

Devo ainda agradecer à **CAPES** e à **FAPERJ**, pelo suporte financeiro na realização desse trabalho.

# resumo

Este trabalho apresenta uma função de Wigner de dois modos amplificados para um oscilador paramétrico óptico não-degenerado, estritamente positiva e convergente, caracterizando assim uma distribuição de probabilidade válida em qualquer regime de operação do OPO. Dessa forma, podemos calcular analiticamente e numericamente qualquer valor estatístico mesmo em torno do ponto crítico, o que não é possível numa distribuição de Wigner linearizada. Verificamos ainda, a existência de *squeezing* e *anti-squeezing* em combinações de quadraturas de dois modos e concluímos, por meio de critérios bem estabelecidos, que essa distribuição trata de dois modos emaranhados do campo eletromagnético, o que permite aplicações na área da informação quântica e mais especificamente na criptografia quântica. Além desses resultados, a distribuição relatada nesse trabalho permite uma fácil visualização da distribuição de probabilidade dos estados, oferecendo *insight* físico além de um grande apelo estético.

# abstract

The aim of this work is to present the Wigner function of two amplified modes in a nondegenerated optical parametric oscillator which is strictly positive and convergent, characterizing a valid distribution of probability in any regime of operation of the OPO. By doing so it is possible to obtain any statistical value through analytic and numerical calculation, even near threshold, which is impossible with a linearized Wigner distribution. We can verify the presence of squeezing and anti-squeezing in the two modes combined quadratures, and we conclude that this distribution leads to two modes entangled state as well, by the use of the well established criterion, which allows for application in quantum information, and more specifically in quantum cryptography. Besides those results, the distribution obtained in this work allows an easy visualization of the probability distribution of the states, bringing some physical insight and has a good stetic appeal.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>MECÂNICA QUÂNTICA EM SISTEMAS ABERTOS</b>	<b>7</b>
2.1	A Equação Mestra: um primeiro contato . . . . .	8
2.2	Conhecimento e informação de um sistema . . . . .	10
2.3	A Matriz Densidade . . . . .	12
2.3.1	A Dinâmica do Operador Densidade . . . . .	14
2.4	A Equação Mestra . . . . .	17
<b>3</b>	<b>A EQUAÇÃO MESTRA E SUA REPRESENTAÇÃO DE WIGNER</b>	<b>22</b>
3.1	A função de Wigner . . . . .	22
3.2	Propriedades da Função de Wigner . . . . .	24
3.2.1	Marginais . . . . .	24
3.2.2	Superposição de Estados Quânticos como Superposição no Espaço de Fase	25
3.2.3	Valores negativos da Função de Wigner . . . . .	27
3.3	A equação de Fokker-Planck . . . . .	27
<b>4</b>	<b>O OSCILADOR PARAMÉTRICO ÓPTICO NÃO-DEGENERADO</b>	<b>31</b>
4.1	O Oscilador Paramétrico . . . . .	32
4.2	Descrição geral sobre o OPO . . . . .	33
4.3	Processos Ópticos Não-Lineares . . . . .	33
4.3.1	Descrições de Interações Ópticas Não-Lineares . . . . .	34
4.4	Soluções Clássicas do OPO . . . . .	40
4.5	Quadraturas e “ <i>Squeezing</i> ” . . . . .	41

<b>5</b>	<b>FUNÇÃO DE WIGNER DE DOIS MODOS AMPLIFICADOS EM UM OPO NÃO-DEGENERADO</b>	<b>44</b>
5.1	Equações Diferenciais Estocásticas . . . . .	44
5.2	A Função de Wigner para o OPO Não-Degenerado . . . . .	46
5.3	Marginal da Função de Wigner . . . . .	49
5.4	Análise Abaixo do Limiar . . . . .	50
5.5	Análise em Torno e Acima do Limiar . . . . .	53
5.6	Critério de Emarahamento Baseado na Observação de Dois Modos Comprimidos	60
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Tipos de ordenamento de operadores</b>	<b>65</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo de um termo típico da Equação de Fokker-Planck</b>	<b>66</b>
<b>C</b>	<b>Lista de Figuras</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A mecânica de Newton foi a primeira grande teoria nos tempos modernos a tentar descrever a física do nosso (macroscópico) dia a dia. Sua abrangência é bastante vasta conseguindo inclusive penetrar no domínio do macrocosmo como, por exemplo, modelar o sistema solar. Seu sucesso no poder das previsões durou até o início do século XX, quando as leis de Newton falharam em descrever o mundo microscópico! Tudo que imaginávamos sobre os elétrons, átomos ou até mesmo sobre a luz foi provado impreciso, para não dizer errado.

Em 1900, Max Planck começa a revelar uma nova teoria, hoje conhecida como Mecânica Quântica. Ela é responsável por nosso entendimento teórico do “mundo” atômico e sub-atômico. Através dela foi possível modelar matematicamente sistemas microscópicos cujas soluções coincidem em grande precisão com os resultados experimentais. Os elétrons deixaram de ser entendidos puramente como minúsculas partículas e a luz deixou de ser simplesmente uma onda eletromagnética. Com uma nova teoria surgindo, novos sistemas físicos apareceram e a dificuldade para resolvê-los cresceu de forma inimaginável se comparados à teorica clássica.

A equação diferencial que rege essa teoria é chamada de equação de Schrödinger em homenagem a um de seus criadores. Ela é bem mais complicada que a equação de Newton: é uma mistura de equação da onda com a equação da difusão envolvendo amplitudes complexas. Ela tem a seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

Quando um tratamento estatístico se faz necessário, utilizar a equação de Schrödinger não é adequado. Isso ocorre muito na óptica quântica, por exemplo, em sistemas como o oscilador

paramétrico óptico (OPO), que converte um feixe de laser que é bombeado para dentro da cavidade em feixes de outras frequências por meio de uma interação não-linear com o cristal. No capítulo 4 discutiremos o OPO em detalhes.

Na verdade, este é o sistema físico no qual estamos interessados nesta dissertação, e uma vez que há interação entre a radiação e a matéria, há também dissipação e a melhor maneira de modelá-la não é usando a já mencionada equação de Schrödinger, mas sim através de uma equação mestra, que relaciona as taxas de transições e probabilidades de um dado sistema, ou através de uma equação quântica de Langevin.

Voltando ao nosso sistema, através da equação mestra conseguimos montar uma equação diferencial de operadores, que geralmente é muito difícil de achar uma solução. É possível porém, através da teoria das representações, mapearmos uma equação quântica numa equação clássica. Nessa correspondência deixaremos de ter uma equação mestra de operadores e passaremos a ter uma equação diferencial parcial (EDP) que será o mapeamento de uma grandeza quântica chamada de matriz densidade, geralmente representada por  $\hat{\rho}$ , em uma função “quase-distribuição” ou distribuição de “quase-probabilidade” que possui as propriedades de uma função clássica.

Estas “quase-probabilidades” se mostraram extremamente úteis quando aplicadas em vários sistemas da mecânica quântica. Nem sempre é possível mapear a dinâmica do operador densidade  $\hat{\rho}$  numa quase-distribuição. Mas quando isso é possível, uma grande vantagem é obtida por se tratar de uma equação para uma função clássica.

Muitas vezes a dinâmica da distribuição de quase-probabilidade é dada por uma equação de Fokker-Planck. Nesse caso, analogias podem ser feitas entre fenômenos de flutuações clássicas e flutuações geradas pela dinâmica quântica, favorecendo assim nossa intuição quando nos deparamos com efeitos das flutuações quântica. Outra facilidade pertinente ainda aparece: ferramentas matemáticas previamente desenvolvidas podem ser utilizadas quando necessárias.

Existem várias formas de estabelecer uma correspondência entre a teoria quântica e a teoria clássica. A idéia original nos remete ao trabalho de Wigner [1]. Ele, porém, não estava interessado em questões relacionadas a óptica quântica, e sim em questões relacionadas com a mecânica quântica em geral. O uso da correspondência entre as duas teorias se deu na óptica quântica através dos trabalhos de Glauber [2] e Sudarshan [3]. Eles desenvolveram de forma

independente o que hoje é conhecido como representação P de Glauber-Sudarshan, ou simplesmente representação P. Essa representação irá calcular a média de operadores escritos em ordem normal através da correspondência entre ele e médias no espaço de fase clássico.

Estaremos, aqui, interessados na representação devido a Wigner, que nos dá a média dos operadores no ordenamento simétrico ou ordenamento de Weyl.

Em 1932, Wigner [1] introduziu a função distribuição  $W(q, p)$ , agora conhecida como distribuição de Wigner, que caracteriza o estado  $|\psi\rangle$  de um sistema quântico no espaço de fase dada por

$$W(q, p) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{1}{2}\hbar x | \hat{\rho} | q - \frac{1}{2}\hbar x \rangle e^{ixp} dx. \quad (1.1)$$

No caso especial em que  $|\psi\rangle$  é um estado puro,  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  e  $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$  é a função de onda de Schrödinger, temos que

$$\langle q + \frac{1}{2}\hbar x | \hat{\rho} | q - \frac{1}{2}\hbar x \rangle = \psi^* \left( q - \frac{1}{2}\hbar x \right) \psi \left( q + \frac{1}{2}\hbar x \right). \quad (1.2)$$

Porém,  $W(q, p)$  não possui todas as características de uma densidade de probabilidade e ela pode adquirir valores negativos. E por esse motivo, ela ficou conhecida como uma densidade de *quase-probabilidade*. Consequentemente, a distribuição de Wigner possui alguns, mas não todos os atributos de uma densidade de probabilidade. Isto é um reflexo do fato de que a mecânica quântica não admite que esses estados possuam análogos clássicos.

Pouco progresso poderia ser feito com os métodos empregados na equação de Fokker-Planck se esperássemos ter sempre a sorte de encontramos equações com soluções analíticas ou de fácil simulação numérica. Normalmente, a correspondência entre a teoria quântica e a teoria clássica não nos leva a uma equação de Fokker-Planck e sim a uma equação que parece ser de Fokker-Planck porém que contém termos que envolvem derivadas parciais de ordens superiores a dois. Nessas situações, podemos ter progresso somente através do uso de aproximações, tais como a remoção dessas derivadas de ordens superiores que aparecem na equação.

Nesta dissertação iremos estudar o comportamento estatístico de dois modos correlacionados gerados por conversão paramétrica dentro de uma cavidade ressonante para estes modos.

Obteremos uma solução estacionária para a equação mestra em termos da função de Wigner que representa o sistema. De posse desta distribuição conseguiremos calcular qualquer média em

ordem simétrica de operadores de quadratura dos dois modos interagentes. Esta solução é válida em qualquer regime de operação do OPO, inclusive em torno do ponto crítico. A sequência da dissertação será feita da seguinte forma:

No capítulo 2 apresentamos métodos matemáticos capazes de tratar problemas de mecânica quântica em sistemas abertos.

No capítulo 3 discutiremos a função de Wigner e algumas de suas propriedades assim como a equação de Fokker-Planck, que são ferramentas necessárias para conseguirmos resolver o problema proposto.

No capítulo 4 iremos descrever o Oscilador Paramétrico Óptico e seu funcionamento por meio de interações não-lineares. Esse é o sistema físico de grande interesse para nós, por ser fonte de estados não clássicos de luz, em particular, estados emaranhados. Uma aplicação muito importante é na criptografia quântica.

No capítulo 5 utilizaremos todos os conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores para encontrar a solução exata da função de Wigner para o Oscilador Paramétrico Óptico Não-Degenerado e calcular grandezas referentes a esse sistema físico. Neste capítulo comparamos também nossos resultados com alguns resultados encontrados na literatura.

No capítulo 6 encerramos a dissertação fazendo uma conclusão do trabalho e as nossas perspectivas para o futuro.

Vale a pena, nesse momento, salientar que a função de Wigner de dois modos obtida nessa dissertação é original e de grande valia para os físicos experimentais que trabalham com esse dispositivo, por fornecer o seu mapa de fase em qualquer regime de operação

## Capítulo 2

# MECÂNICA QUÂNTICA EM SISTEMAS ABERTOS

**Sistemas abertos** são sistemas físicos que interagem com o ambiente a sua volta e a eles estão associados mecanismos de perda, como por exemplo a dissipação. Assim, aqueles que trabalhavam com sistemas quânticos abertos precisavam encontrar um meio de lidar com a dissipação de forma coerente com formalismo da mecânica quântica.

Existem dois métodos principais para o tratamento de sistemas abertos. O primeiro método trata das **equações quânticas de Langevin**, baseado nas equações de movimento de Heisenberg. O segundo método está associado com a **equação mestra**, ligada diretamente à perspectiva de Schrödinger. Certamente ambas as técnicas estão relacionadas e a escolha de uma sobre a outra, muitas vezes, depende apenas do gosto pessoal. Existem casos onde a escolha está ligada ao problema em questão, uma vez que as equações de Langevin nem sempre trazem soluções analíticas para problemas não lineares, o uso de uma equação mestra pode trazer, pelo menos, uma distribuição estacionária que descreve o estado de equilíbrio.

Os principais métodos utilizados hoje em dia para tratar as equações mestras são genericamente conhecidos como métodos do **espaço de fase**, ligados à teoria das representações. São especialmente úteis pois permitem que uma equação mestra para operadores seja transformada, algumas vezes, numa **Equação de Fokker-Planck**, que em boa aproximação descreverá um processo de difusão clássico. A vantagem desse método está no mapeamento de operadores de densidade em distribuições clássicas no espaço de fase, o que permite uma manipulação menos restritiva. Nem sempre os processos quânticos podem ser mapeados em processos clássicos,

nesses casos há um preço a se pagar, como por exemplo, encontrarmos uma distribuição de probabilidades negativas. Mais detalhes serão discutidos mais a frente.

## 2.1 A Equação Mestra: um primeiro contato

A equação mestra é uma equação que descreve as mudanças na distribuição de probabilidade de um sistema em função do tempo. Neste primeiro momento será feita uma breve introdução e quando as ferramentas necessárias forem apresentadas, estaremos aptos a utilizar este formalismo mais rigoroso em um sistema específico de grande interesse na óptica quântica.

Podemos exemplificar o uso de uma equação mestra através de um sistema que possa sofrer perturbações e conseqüentemente sofrer transições entre estados, possibilitando assim uma dinâmica para a população de seus estados. Para isso, vamos imaginar um sistema que pode ocupar  $\mathbf{m}$  estados discretos. A probabilidade de encontrar o sistema no estado  $\mathbf{m}$  cresce quando ocorrem mais transições de outros estados  $\mathbf{m}'$  para o estado  $\mathbf{m}$ , e decresce quando ocorrem mais transições do estado  $\mathbf{m}$  para outros estados  $\mathbf{m}'$ . Assim, iremos representar por  $\dot{P}(m, t)$  a diferença entre a taxa de variação em direção a  $\mathbf{m}$  e a taxa de variação dos que deixam  $\mathbf{m}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{P}(m, t) &= \text{taxa em direção a } \mathbf{m} - \text{taxa das que deixam } \mathbf{m} \\ &= T_{dentro} - T_{fora} \end{aligned}$$

$T_{dentro}$  se refere às transições de todos os estados  $\mathbf{m}'$  para  $\mathbf{m}$ . Cada termo é dado pela probabilidade de encontrar o sistema no estado  $\mathbf{m}'$  multiplicando pela probabilidade de transição por unidade de tempo de passar de  $\mathbf{m}'$  para  $\mathbf{m}$ .

$$T_{dentro} = \sum_{m'} W(m|m') P(m', t) \quad . \quad (2.1)$$

Analogamente,

$$T_{fora} = \sum_{m'} W(m'|m) P(m, t) \quad . \quad (2.2)$$

Assim, obtemos a equação mestra de Pauli

$$\dot{P}(m, t) = \sum_{m'} W(m|m') P(m', t) - \sum_{m'} W(m'|m) P(m, t) \quad (2.3)$$

O maior problema em se construir uma equação mestra é a determinação de  $W(m|m')$  explicitamente.  $W(m|m')$  pode ser obtida por primeiros princípios: A probabilidade de transição durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser obtido por exemplo da teoria de perturbação dependente do tempo.

### Regra de Ouro de Fermi

A regra de ouro de Fermi é uma maneira de calcularmos a taxa de transição (probabilidade por unidade de tempo) de um autoestado de energia do sistema em questão ir para um outro autoestado devido a uma perturbação.

Se consideramos um sistema que inicialmente se encontrava num autoestado  $n'$  de um hamiltoniano  $H_0$  e consideramos que o efeito dessa perturbação (que pode ser dependente do tempo) seja descrita por um hamiltoniano  $H_{int}$ , então, a taxa de transição é dada por

$$W(n|n') = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{int}^{nn'}|^2 \rho(E_n) \quad , \quad (2.4)$$

onde  $n$  e  $n'$  representam os estados não perturbados (inicial e final),  $H_{int}^{nn'}$  é o elemento de matriz do termo de perturbação e  $\rho(E_n)$  é a densidade de estados do sistema não perturbado (número de estados por unidade de energia). Veja por exemplo [4]. Em notação de Bra-Ket, podemos escrever

$$|H_{int}^{nn'}|^2 = |\langle n' | H_{int} | n \rangle|^2 \quad . \quad (2.5)$$

Para a solução estacionária, fazemos

$$\dot{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad W(m'|m) P(m) = W(m|m') P(m') \quad (2.6)$$

Esse tipo de equação é conhecida como equação mestra de Pauli. No entanto ela trata apenas das probabilidades e não leva em consideração possíveis fases.

Um tratamento quântico completo deve ser descrito em termos do **Operador Densidade**, (também chamado de **Matriz Densidade**), introduzido por Von Neumann em situações onde existe um elemento estatístico além daquele que se origina na Mecânica Quântica, como por exemplo, a ação de um reservatório.

## 2.2 Conhecimento e informação de um sistema

O vetor de estado contém toda a informação sobre um estado quântico. Porém em muitos casos nós não conhecemos todos os detalhes do nosso sistema. Isso poderia, por exemplo, ser devido ao nosso sistema possuir muitos graus de liberdade ou quando ele estiver acoplado a um reservatório, onde não sabemos os detalhes de seus constituintes. Um átomo que emite de forma espontânea, ou a flutuação de energia dentro de uma cavidade óptica são exemplos de acoplamentos com um reservatório e não podem mais ser descritos em termos de um vetor de estado. Um novo formalismo precisa ser utilizado.

Antes de falarmos da matriz densidade, é preciso verificar com mais profundidade onde a primeira falha acontece se trabalharmos somente com um vetor de estado.

Inicialmente, imagine que uma partícula está num auto-estado de energia descrito pelo vetor de estado  $|m\rangle$ . Qual seria a probabilidade  $P(x) dx$  de encontrar a partícula entre a posição  $x$  e  $x + dx$ ? Levando em consideração um conjunto de experimentos preparados com condições iniciais iguais e fazendo uso da interpretação de Born,  $P(x)$  é o quadrado da função de onda de energia  $u_m(x)$  na representação de posição.

$$P(x)_{|m\rangle} = |\langle x|m\rangle|^2 = |u_m(x)|^2 \quad . \quad (2.7)$$

Complicando um pouco mais, iremos pensar em um caso que seja a superposição de auto-estados de energia,

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m |m\rangle \quad , \quad (2.8)$$

onde  $\psi_m$  são as amplitudes de probabilidade de encontrarmos o sistema num estado  $|m\rangle$ .

A função de onda na representação de posição é

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m u_m(x) \quad (2.9)$$

e com isso, a probabilidade de achar a partícula na posição  $x$  é

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_m^* \psi_n u_m^*(x) u_n(x) \quad . \quad (2.10)$$

Decompondo o somatório duplo em uma parte que  $m = n$  e outra em que  $m \neq n$  chegamos em

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |\psi_m|^2 |u_m(x)|^2 + \sum_{m \neq n} \psi_m^* \psi_n u_m^*(x) u_n(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(x) P(x)_{|m\rangle} + \sum_{m \neq n}^{\infty} \psi_m^* \psi_n u_m^*(x) u_n(x) \quad . \quad (2.11)$$

No primeiro somatório cada termo possui um significado diferente, representando a probabilidade de encontrarmos a partícula numa posição  $x$ , dado que ela está no  $m$ -ésimo auto-estado de energia. Repare que a probabilidade de encontrarmos a partícula na posição  $x$ , dado um estado preparado como (2.8) não é somente a soma das probabilidades, mas também envolve o somatório duplo contendo os termos  $\psi_m^* \psi_n u_m^*(x) u_n(x)$  para  $m \neq n$ . Neste termo está contido a interferência e faz a distinção crucial entre a mecânica quântica e a mecânica clássica.

Vamos dar um passo adiante em busca da matriz densidade. Supomos que a única informação que temos é a probabilidade de encontrarmos o estado no  $m$ -ésimo auto-estado de energia. Podemos ainda descrever a partícula pela superposição de estados? Quais são os coeficientes da expansão  $\psi_m$ ?

Vamos então escolher como sendo a raiz quadrada da probabilidade.  $\psi_m = \sqrt{P_m}$ . Generalizando um pouco mais, podemos ainda levar em conta uma fase.

$$\psi_m(\varphi_m) = \sqrt{P_m} e^{i\varphi_m} \quad . \quad (2.12)$$

Como não temos nenhuma informação sobre a fase, devemos pegar a média sobre todas as possibilidades. Assim,

$$\overline{e^{i\varphi_m}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_m e^{i\varphi_m} = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Nesse caso, temos que calcular a média da probabilidade

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m |u_m(x)|^2 + \sum_{m \neq n}^{\infty} \sqrt{P_m P_n} e^{i(\varphi_n - \varphi_m)} u_m^*(x) u_n(x) \quad (2.14)$$

para acharmos a partícula na posição  $x$  com respeito a distribuição constante de fases. De fato, a distribuição de probabilidade média  $\overline{P}(x)$  é

$$\overline{P}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m |u_m(x)|^2 \quad . \quad (2.15)$$

Usando esse procedimento, nós encontramos a distribuição de posição corretamente. Porém, podemos representar um estado quântico caracterizado pelas probabilidades e por fases aleatórias por um vetor de estado

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{P_m} e^{i\varphi_m} |m\rangle \quad , \quad (2.16)$$

que seja a superposição de auto-estados de energia? Certamente não! Quando calcularmos a média desse estado iremos obter zero!

Temos um problema. A falta de informação sobre um sistema não nos permite utilizar o formalismo com que estamos acostumados. Por exemplo, um estado misto seria tratado por meio de um vetor de estado?

Se um sistema quântico está num certo microestado, descrito por um vetor de estado  $|\Psi^{(i)}\rangle$ , dizemos que ele está num *estado puro*. Por outro lado, se o sistema pode estar em qualquer de vários microestados  $|\Psi^{(i)}\rangle$  com probabilidades  $p_i$ , então significa que estamos lidando com um *estado misto*.

Trabalhamos com estados mistos quando a informação que possuímos sobre nosso sistema é incompleta; sendo assim, apelamos para o conceito de probabilidade. Exemplificando, a luz emitida espontaneamente por uma fonte pode ter qualquer estado de polarização com igual probabilidade. Dizemos, então, que nosso sistema pode ser descrito por um estado que tem 50% de chance de ser encontrado com polarização vertical ( $|\uparrow\rangle$ ) ou 50% de chance de ser encontrado com polarização horizontal ( $|\rightarrow\rangle$ ).

O caso da luz não polarizada recai sobre o mesmo problema da falta de informação encontrado acima. E agora se faz necessário um novo formalismo: a **Matriz Densidade**.

## 2.3 A Matriz Densidade

Na mecânica estatística, imaginamos que um sistema pode assumir vários microestados para um certo estado macroscópico. Fazendo uso de algumas poucas e muito gerais hipóteses, podemos criar um formalismo capaz de derivar uma densidade de probabilidade de achar o estado num certo microestado. Isto é possível através da *matriz densidade*, que ainda permite que a utilizemos para calcular todas as quantidades observáveis. Precisamos agora estender esse conceito para sistemas quânticos.

Cada observável clássico  $f(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  corresponde a um operador hermiteano  $\hat{f}(\hat{\vec{r}}_i, \hat{\vec{p}}_i)$ . Precisamos, porém, tomar cuidado quando a função clássica for não-linear. Estabelecer um ordenamento de operadores será necessário afim de evitar erros na passagem da mecânica clássica para a mecânica quântica. No apêndice A comentamos um pouco mais sobre os ordenamentos

de operadores.

Se uma medição de um observável  $\hat{f}$  for realizada num conjunto de sistemas idênticos, estaremos aptos apenas a saber a média dos valores quânticos esperados, pesados pelas probabilidades  $P_i$ .

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_i P_i \langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(i)} \rangle \quad . \quad (2.17)$$

Esta porém não é a expressão mais geral que podemos obter, uma vez que só consideramos os elementos da diagonal principal. Na mecânica quântica existem quantidades mensuráveis que se encontram fora da diagonal principal, como por exemplo, termos de interferência. Consequentemente, podemos estender o alcance da equação anterior de forma a obtermos

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{i,k} P_{k,i} \langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(k)} \rangle \quad . \quad (2.18)$$

A quantidade  $P_{k,i}$  é interpretada como a probabilidade na qual um elemento de matriz  $\langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(k)} \rangle$  contribui para a média estatística  $\langle \hat{f} \rangle$  de um observável  $\hat{f}$ .

A transição entre (2.17) e (2.18) pode ser justificada se expandirmos o estado  $\Psi_E^{(i)}$  em termos de um conjunto completo  $\varphi_k$ ,

$$\Psi_E^{(i)} = \sum_k a_k^i \varphi_k \quad (2.19)$$

Inserindo (2.19) em (2.17), obtemos

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_i P_i \sum_{k,k'} a_k^{(i)*} a_{k'}^{(i)} \langle \varphi_k | \hat{f} | \varphi_{k'} \rangle = \sum_{k,k'} \left( \sum_i P_i a_k^{(i)*} a_{k'}^{(i)} \right) \langle \varphi_k | \hat{f} | \varphi_{k'} \rangle \quad (2.20)$$

A expressão entre parêntesis pode ser identificada como sendo a probabilidade mais geral  $P_{k',k}$  na qual contém, inclusive, termos não diagonais,

$$P_{k',k} = \sum_i P_i a_k^{(i)*} a_{k'}^{(i)} \quad (2.21)$$

assim, equação (2.20) se torna

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{k,k'} P_{k',k} \langle \varphi_k | \hat{f} | \varphi_{k'} \rangle \quad (2.22)$$

Interpretando os números  $P_{k',k}$  como elementos de matriz de um operador  $\hat{\rho}$  na base  $\{\varphi_k\}$ , ou seja,  $P_{k',k} = \langle \varphi_{k'} | \hat{\rho} | \varphi_k \rangle$ , obtemos para (2.22)

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{k,k'} \langle \varphi_{k'} | \hat{\rho} | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k | \hat{f} | \varphi_{k'} \rangle \quad (2.23)$$

que acompanhada da relação de completeza  $\sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = 1$ , nos permite concluir que

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{k'} \langle \varphi_{k'} | \hat{\rho} \hat{f} | \varphi_{k'} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{f}) \quad (2.24)$$

Outra forma de expressar o valor esperado de um observável é definirmos

$$\hat{\rho} = \sum_k P(k) |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad , \quad (2.25)$$

e com isso,  $\langle \hat{f} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{f})$ .

Podemos agora perceber porque o conhecimento da matriz densidade é útil e importante. A média estatística de um observável  $\hat{f}$  corresponde ao cálculo do traço do produto entre  $\hat{\rho}$ , o operador densidade, e o operador  $\hat{f}$ . Os elementos de matriz  $P_{ki}$  numa base arbitrária são as probabilidades com a qual os elementos de matriz  $\langle i | \hat{f} | k \rangle$  do observável  $\hat{f}$  contribuem para as médias estatísticas naquela base.

Não é difícil notar que toda a informação sobre observáveis carregada pela função de onda está, também, contida no operador de densidade. Portanto, um operador desse tipo é essencialmente equivalente ao vetor de estado.

### 2.3.1 A Dinâmica do Operador Densidade

De acordo com a mecânica quântica, o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  evolui no tempo conforme a equação de Schrödinger,

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \quad , \quad (2.26)$$

onde  $H(t)$  é o hamiltoniano do sistema. A solução da equação de Schrödinger pode ser representada em termos de um operador unitário de evolução temporal  $U(t, t_0)$  que transforma o estado em algum momento inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  num estado  $|\psi(t)\rangle$  num instante  $t$ ,

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad . \quad (2.27)$$

Vale a pena lembrar que a condição de  $U(t, t_0)$  ser unitário se deve ao fato de querermos que exista a conservação da norma.

Se substituirmos (2.27) em (2.26) encontraremos uma equação diferencial para o operador de evolução temporal,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) \quad , \quad (2.28)$$

sujeita a condição inicial

$$U(t_0, t_0) = 1 \quad . \quad (2.29)$$

Com o auxílio da equação (2.28) fica fácil demonstrar que  $U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) = 1$  e que  $U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = 1$ , mostrando assim que ele realmente é unitário.

Para um sistema fechado (isolado de interações), o hamiltoniano independe do tempo e podemos integrar (2.28) de forma direta, dando como solução

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \quad . \quad (2.30)$$

Para um hamiltoniano dependente do tempo a solução de (2.28) sujeito a (2.29) pode ser representada através da exponencial ordenada no tempo

$$U(t, t_0) = T_{\leftarrow} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t')} \quad . \quad (2.31)$$

$T_{\leftarrow}$  denota um operador de ordenamento temporal cronológico que ordena o produto de operadores dependentes do tempo de tal maneira que a parte temporal dos argumentos aumentem da direita para a esquerda conforme indica a seta.

Se o sistema em questão estiver num estado misto o correspondente ensemble estatístico quântico poderá ser caracterizado pela matriz densidade.

$$\hat{\rho}(t_0) = \sum_k P(k) |\psi_k(t_0)\rangle \langle \psi_k(t_0)| \quad , \quad (2.32)$$

onde  $P(k)$  são pesos estatísticos positivos e  $|\psi_k(t_0)\rangle$  são vetores de estados normalizados, que evoluem no tempo de acordo com (2.27). A evolução temporal do operador densidade será

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k P(k) U(t, t_0) |\psi_k(t_0)\rangle \langle \psi_k(t_0)| U^\dagger(t, t_0) \quad , \quad (2.33)$$

que pode ser escrito mais precisamente como

$$\hat{\rho}(t) = U(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad . \quad (2.34)$$

Assim, calculando a derivada temporal de (2.33), podemos encontrar uma equação de movimento determinística (uma vez que ainda estamos tratando de um sistema fechado), para o operador densidade,

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_k P(k) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi_k(t)\rangle \right) \langle \psi_k(t)| + |\psi_k(t)\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_k(t)| \right) \right] \quad (2.35)$$

e utilizando a equação de Schrödinger (2.26) obtemos

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_k P(k) \left[ \frac{1}{i\hbar} H |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)| H \right] \quad (2.36)$$

de forma que podemos escrevê-la como

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad . \quad (2.37)$$

A equação acima é chamada de equação de *Liouville - von Neumann*, ou simplesmente equação de *von Neumann*. Com intuito de dar ênfase numa analogia entre a equação de von Neumann com a equação correspondente clássica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\} \quad (2.38)$$

para a densidade de probabilidade da mecânica estatística, iremos escrevê-la de forma que se pareça com a equação clássica de Liouville (2.38)

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \hat{L}(t) \hat{\rho}(t) \quad , \quad (2.39)$$

onde  $\hat{L}(t)$  é o super-operador de Liouville que é definido com sendo aquele que aplicado em  $\hat{\rho}(t)$  é igual a  $\frac{1}{i\hbar} [H(t), \hat{\rho}(t)]$ , ou seja,

$$\hat{L}(t) \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \hat{\rho}(t)] \quad . \quad (2.40)$$

Ele é chamado de super-operador pois ele age sobre um outro operador dando ainda um operador. Em analogia direta com a equação (2.31), a equação de Liouville nos leva a uma expressão formal

$$\hat{\rho}(t) = T_{\leftarrow} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{L}(t')} \hat{\rho}(t_0) \quad . \quad (2.41)$$

Para o caso particular em que o hamiltoniano independe do tempo, o super-operador de Liouville também independará. Assim, teremos à partir da equação anterior que

$$\hat{\rho}(t) = e^{\hat{L}(t-t_0)} \hat{\rho}(t_0) \quad . \quad (2.42)$$

## 2.4 A Equação Mestra

Na seção anterior foram abordadas brevemente as equações fundamentais que descrevem a dinâmica de um sistema fechado. Vamos agora voltar a nossa atenção para sistemas abertos.

Em termos gerais um sistema quântico aberto  $S$  está acoplado a um outro sistema quântico denominado reservatório  $R$ . Ele, então, representa um sub-sistema da combinação de  $R + S$ . Assim, o estado do sub-sistema  $S$  irá mudar devido a sua dinâmica interna e devido ao contato com o reservatório. Essa interação levará ao estado de  $S$  uma dinâmica que não poderá mais ser governada em termos da dinâmica Hamiltoniana unitária.

Seja  $H_S$  o espaço de Hilbert do sistema e  $H_R$  o espaço de Hilbert do reservatório. O espaço de Hilbert total do sistema  $R + S$  é então dado pelo produto tensorial  $H = H_S \otimes H_R$ . De forma geral, podemos escrever o hamiltoniano do sistema como

$$H = H_S + H_R + V \quad , \quad (2.43)$$

onde  $V$  denota a interação entre o sistema e o reservatório.

Seja  $w(t)$  o operador densidade total do sistema acoplado com o reservatório na perspectiva de interação. A equação de movimento é então dada por

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [V(t), w(t)] \quad . \quad (2.44)$$

Podemos obter as informações relevantes se pegarmos o operador densidade reduzido do sistema que é definido por

$$\hat{\rho}(t) = Tr_R \{w(t)\} \quad , \quad (2.45)$$

onde  $Tr_R$  indica o traço (valor médio) sobre as variáveis do reservatório. Assumimos inicialmente (quando a interação se inicia) que os estados do sistema e do reservatório estão descorrelacionados

$$w(0) = \rho(0) \otimes \rho_R \quad , \quad (2.46)$$

onde  $\rho_R$  é o operador densidade do reservatório.

O reservatório em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$  é descrito pelo operador densidade

$$\hat{\rho}_R = \prod_j \exp \left( -\frac{\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j}{k_b T} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega_j}{k_b T}} \right) \quad (2.47)$$

Integrando a equação de movimento (2.44), obtemos

$$w(t) = w(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 [V(t_1), w(t_1)] \quad . \quad (2.48)$$

Iterando essa solução, encontramos

$$w(t) = w(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [V(t_1), [V(t_2), \dots [V(t_n), w(0)]]] \quad . \quad (2.49)$$

Calculando o traço sobre as variáveis do reservatório, ou seja, eliminando as variáveis do reservatório tomando valores médios gerados por (2.47), temos:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ &\quad \times \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_R \{ [V(t_1), [V(t_2), \dots [V(t_n), \rho_R \otimes \rho(0)]]] \} \\ &\equiv [1 + U_1(t) + U_2(t) + \dots] \rho(0) \\ &\equiv U_n(t) \rho(0) \quad , \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde

$$U_n(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \text{Tr}_R \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [V(t_1), [V(t_2), \dots [V(t_n), \rho_R \otimes \rho(0)]]] \quad (2.51)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= (\dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots) \hat{\rho}(0) \\ &= (\dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots) U^{-1}(t) \hat{\rho}(t) \\ &= L(t) \hat{\rho}(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde  $L(t)$  é o gerador das evoluções temporais, dado por

$$L(t) = (\dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots) U^{-1}(t) \quad (2.53)$$

Vamos assumir que  $V(t)$  é tal que  $\text{Tr}_R(V(t) \hat{\rho}_R) = 0$ . Isso garante o fato de  $U_1(t) = 0$ . Se a perturbação é fraca, nós podemos ignorar os termos acima da segunda ordem de  $L(t)$ . Esta aproximação é conhecida como aproximação de Born. Assim, até a segunda ordem de perturbação temos

$$L(t) \hat{\rho}(t) = \dot{U}_2(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R [V(t), [V(t_1), \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t_1)]] \quad (2.54)$$

Fazendo uso agora da aproximação Markoviana,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R [V(t), [V(t_1), \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t)]] \quad . \quad (2.55)$$

Repare que no último comutador,  $t_1$  foi trocado por  $t$ . Antes dessa aproximação, o operador  $\hat{\rho}(t)$  no instante  $t$  dependia do operador  $\hat{\rho}(t)$  em todo o intervalo  $0 < t_1 < t$ .

O próximo termo da série seria quadrático na constante de acoplamento. Como supomos que ela seja muito pequena, podemos esperar que (2.55) seja uma boa aproximação.

Vamos agora considerar o caso descrito pelo seguinte hamiltoniano de interação na aproximação de onda girante (*rotating wave approximation*)

$$V(t) = \hbar \left[ \hat{a}^\dagger \Gamma(t) e^{i\omega_0 t} + \hat{a} \Gamma^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t} \right] \quad , \quad (2.56)$$

onde  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  são os operadores de criação e aniquilação respectivamente no espaço de Hilbert do Sistema. O reservatório R é modelado como uma coleção de osciladores harmônicos com frequência  $\omega_j$  e operadores de criação e aniquilação  $\hat{b}_j^\dagger$  e  $\hat{b}_j$ , com relação de comutação já conhecida dada por  $[\hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger] = \delta_{jk}$ . Assim, os osciladores se acoplam ao reservatório através da constante de acoplamento  $g_j = g_j(\omega)$ .

A aproximação de onda girante é usada quando negligenciamos termos no hamiltoniano que oscilam muito rapidamente e por isso na média não contribuem. Mesmo nessa aproximação os outros efeitos continuam praticamente inalterados. Essa aproximação é válida quando o amortecimento é pequeno (o que normalmente é o caso). Logo, podemos escrever

$$\hat{\Gamma}(t) = \sum_j g_j \hat{b}_j e^{-i\omega_j t} \quad (2.57)$$

Substituindo a expressão de  $V(t)$  equação (2.56) na equação mestra na aproximação de Born-Markoviana, equação (2.55), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R [V(t), [V(t_1), \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t)]] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R [V(t), V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t_1)] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R (V(t) V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) - V(t) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t_1) \\ &\quad - V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t) + \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t_1) V(t)) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Por exemplo, tomando um termo típico da equação acima

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R (V(t) V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t)) \\
&= \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R \left\{ \hbar^2 \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\Gamma}(t) e^{i\omega_0 t} + \hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t} \right] \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\Gamma}(t_1) e^{i\omega_0 t_1} + \hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger(t_1) e^{-i\omega_0 t_1} \right] \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) \right\} \\
&= \hbar^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t+t_1)} \\
&+ \hbar^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t-t_1)} \\
&+ \hbar^2 \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t+t_1)} \\
&+ \hbar^2 \hat{a} \hat{a} \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t-t_1)} \quad .
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Analisando agora uma das integrais,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t+t_1)} \\
&= \int_0^t dt_1 \sum_{ij} g_i g_j \langle \hat{b}_i \hat{b}_j \rangle_R e^{-i(\omega_i t + \omega_j t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

onde usamos a definição de  $\hat{\Gamma}$  da equação (2.57). Convertendo a soma sobre todos os modos em uma integral,

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega) \quad , \tag{2.61}$$

onde  $\rho(\omega)$  é a densidade de estados na frequência  $\omega$ . Assim,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \rho(\omega_1) \int_0^\infty \frac{d\omega_2}{2\pi} \rho(\omega_2) \times \\
&\times g(\omega_1) g(\omega_2) \langle \hat{b}(\omega_1) \hat{b}(\omega_2) \rangle_R e^{-i(\omega_1 t + \omega_2 t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)} \quad .
\end{aligned} \tag{2.62}$$

No caso em que o reservatório está em um banho térmico, são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{b}(\omega_1) \hat{b}(\omega_2) \rangle_R &= 0 \\
\langle \hat{b}^\dagger(\omega_1) \hat{b}(\omega_2) \rangle_R &= 2\pi N(\omega) \delta(\omega_1 - \omega_2)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Pela relação de comutação

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \Rightarrow \hat{b} \hat{b}^\dagger = 1 + \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad , \tag{2.64}$$

o que implica em

$$\langle \hat{b}(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) \rangle_R = 2\pi (N(\omega) + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad , \tag{2.65}$$

pois

$$Tr_R \left( \hat{\rho}_R \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \right) = \frac{e^{-\hbar\omega_j/K_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_j/K_B T}} = \bar{N}(\omega_j, T) \quad . \quad (2.66)$$

Os termos não nulos nas funções de correlações do reservatório serão

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \rho^2(\omega) g^2(\omega) N(\omega, T) \\ \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \rho^2(\omega) g^2(\omega) [1 + N(\omega, T)] \quad . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Assim, retornando à equação (2.58) e (2.59) obtemos a seguinte expressão para  $\hat{\rho}(t)$ .

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\gamma}{2} (N + 1) [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \frac{\gamma}{2} N (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger) \quad , \quad (2.68)$$

onde  $\gamma$  é uma constante ligada a dissipação proporcional ao quadrado do número de estados acessíveis do sistema.  $\gamma \propto \rho^2(\omega)$ .

Essa equação mestra representa o sistema com dissipação. Se acrescentarmos, por exemplo, um cristal não-linear, aparecerá no hamiltoniano uma interação adicional  $\hat{H}_i$ , representando a interação entre o cristal o feixe de bombeamento. A equação mestra na perspectiva de Schrödinger será

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_i, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (N + 1) [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \frac{\gamma}{2} N (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger) \quad , \quad (2.69)$$

ou seja, apenas acrescentamos o termo de interação. Além disso é comum em sistemas ópticos de interesse à temperatura ambiente termos  $\langle N \rangle \ll 1$ , permitindo assim uma simplificação na equação (2.69)

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_i, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] \quad . \quad (2.70)$$

A equação acima representa uma equação efetiva do sistema onde os efeitos do reservatório estão representados no termo  $\gamma$ , gerando flutuação e dissipação no sistema. No desenvolvimento dessa equação mestra supomos que há uma infinidade de modos acessíveis no reservatório. Existem casos onde pode-se utilizar um outro modelo para representar o reservatório. Nesse caso uma nova derivação da equação mestra é necessária. Enquanto o reservatório em questão não for alterado, o único termo da equação mestra que muda é o termo de interação do hamiltoniano. Dessa forma, uma vasta gama de problemas podem ser tratados utilizando a equação mestra acima encontrada.

## Capítulo 3

# A EQUAÇÃO MESTRA E SUA REPRESENTAÇÃO DE WIGNER

Neste capítulo faremos uma breve introdução sobre a Função de Wigner, que está diretamente ligada a Teoria das Representações. Esse nome advém da idéia de tentarmos mapear um problema quântico num problema clássico. A técnica utilizada é mapear equações mestras quânticas em funções de probabilidade clássicas que possam, em certas condições, permitir cálculos de médias quânticas utilizando apenas técnicas e distribuições clássicas.

Obviamente essa técnica nem sempre pode ser utilizada. A Função de Wigner em alguns casos pode apresentar anomalias que sugerem o fato de alguns fenômenos quânticos não poderem ser representados ou não possuírem um análogo clássico. Entretanto, quando há a possibilidade de uma representação, podemos utilizar ferramentas matemáticas simplificadas que anteriormente (no caso quântico) não poderiam ser aplicadas ao problema.

### 3.1 A função de Wigner

A teoria quântica se mostra muito eficiente quando tentamos descrever sistemas microscópicos. Esta descrição geralmente é feita através de um vetor de estado  $|\Psi\rangle$  ou então através de um operador densidade  $\hat{\rho}$  que descreve o sistema. Ainda sim, eles são grandezas abstratas e nem sempre conhecê-los nos permite resolver o problema em questão. Uma idéia criada foi a chamada função de Wigner, que se encaixa na Teoria das Representações. Esta teoria tenta fazer uma conexão entre a mecânica quântica e a mecânica clássica no espaço de

fase. Obviamente, um único sistema clássico não pode representar um sistema quântico devido ao caráter probabilístico deste último e, por isso, devemos ter um conjunto de sistemas.

A teoria das representações busca uma função clássica que possa representar o estado quântico e através dela devemos ser capazes de encontrar resultados coerentes com a mecânica quântica.

Há, porém, um preço a se pagar quando tentamos representar um sistema quântico de forma clássica. A distribuição de Wigner pode admitir valores negativos e por esse motivo ela é muitas vezes chamada de distribuição de “quase-probabilidade”. Quando esses valores negativos aparecem podemos interpretá-los como uma assinatura quântica: o sistema em questão não possui uma representação clássica, porém, ainda é possível utilizá-lo para obter informações sobre o sistema.

A distribuição de Wigner para um sistema quântico descrito por  $\hat{\rho}$  é (vide [1]):

$$W(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho} | x - \frac{1}{2}\xi \rangle \quad . \quad (3.1)$$

Essa quantidade apareceu originalmente no artigo de E. P. Wigner em 1932, em um contexto onde a distribuição serviria simultaneamente à física estatística clássica e à física estatística quântica no cálculo de médias de distribuições. Porém, nenhuma motivação foi dada para a expressão acima. Podemos encontrar uma motivação no terceiro capítulo de [5], onde o autor tem como objetivo descrever o movimento de transição de uma partícula na posição  $x'$  para uma outra posição  $x''$ .

Há ainda uma outra maneira de definir a função de Wigner em termos da transformada de Fourier de uma função característica como é mostrado em [6]. A função característica é dada por

$$\chi_W(Z, Z^*, t) = Tr(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger + iZ \hat{a}}), \quad (3.2)$$

e a função de Wiger  $W(\alpha, \alpha^*, t)$  é a transformada de Fourier de  $\chi_W(Z, Z^*, t)$

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2Z \chi_W(Z, Z^*, t) e^{-iZ\alpha} e^{-iZ^*\alpha^*} \quad . \quad (3.3)$$

Há, ainda, uma relação entre a função de Wigner e o cálculo de médias de operadores. Podemos utilizar a função de Wigner para calcular médias em **ordem simétrica** (ou ordenamento de Weyl) de operadores [7],

$$\langle (a^\dagger)^p a^q \rangle_W = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*p} \alpha^q \quad , \quad (3.4)$$

onde  $(a^\dagger p a^q)_W$  denota a média de  $\frac{(p+q)!}{p!q!}$  possíveis ordenamentos de p operadores  $\hat{a}^\dagger$  e q operadores  $\hat{a}$ . Para mais detalhes, consulte o apêndice A.

## 3.2 Propriedades da Função de Wigner

Como estamos tentando representar um sistema quântico em termos de uma função clássica, é de se esperar que ela, pelo menos, nos traga um pouco de intuição física de uma quantidade abstrata como o vetor de estado ou a matriz densidade. Mas não é só isso que ela nos concede. Cálculos de médias e valores esperados também são possíveis com o uso da função de Wigner. Ou seja, somos capazes de calcular valores esperados quânticos através de cálculos clássicos, uma vez que a função de Wigner é conhecida. O fato impressionante é que a função de Wigner possui propriedades simples e, ainda assim é capaz de fazer tantas previsões.

### 3.2.1 Marginais

Calculamos a marginal da função de Wigner quando a integramos em uma de suas variáveis. Supondo, inicialmente, que a função de Wigner seja função da posição e do momento, a integração em uma de suas variáveis nos trará conhecimento sobre a distribuição de probabilidade da outra variável. Podemos integrar a equação (3.1) tanto em relação a variável de posição (x), ou de momento (p).

Se integrarmos ambos os lados de (3.1) com relação a p e trocarmos a ordem de integração entre p e  $\xi$ , poderemos começar nossa análise para **Distribuição de Posição**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho} | x - \frac{1}{2}\xi \rangle \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \quad (3.5)$$

que com ajuda de

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} = \delta(\xi) \quad (3.6)$$

se reduz a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho} | x - \frac{1}{2}\xi \rangle \delta(\xi) \quad , \quad (3.7)$$

o que significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle \equiv W(x) \quad . \quad (3.8)$$

Fica demonstrado, então, que a integração sobre o momento nos dá a distribuição para a posição.

Se agora integrarmos (3.1) em relação a  $x$ , teremos a **Distribuição de Momento**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho} | x - \frac{1}{2}\xi \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} . \quad (3.9)$$

Utilizando uma mudança de variáveis,  $x' = x - \frac{1}{2}\xi$  e  $x'' = x + \frac{1}{2}\xi$ , encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}p(x''-x')} . \quad (3.10)$$

Inserindo dois conjuntos completos

$$1 = \int dx' |x'\rangle \langle x'| \quad e \quad 1 = \int dx'' |x''\rangle \langle x''|$$

e usando o fato que

$$\langle p | x'' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px''} , \quad (3.11)$$

chegamos a conclusão que

$$W(p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \langle p | x'' \rangle \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | p \rangle . \quad (3.12)$$

A integração em uma das variáveis da função de Wigner nos traz informação sobre a outra variável em forma de um distribuição de probabilidades.

Podemos ainda entender a marginal como sendo uma série de medidas ou na posição ou no momento. Após repetidas medições teremos a probabilidade associada a uma certa variável. Em outras palavras, a marginal é uma projeção da função de Wigner em um plano associado a uma certa variável.

### 3.2.2 Superposição de Estados Quânticos como Superposição no Espaço de Fase

Outra propriedade interessante da função de Wigner é a regra do traço do produto entre dois operadores densidade, que nos permite ganhar um “insight” mais profundo sobre a forma dos estados quânticos.

$$Tr(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_1}(x, p) W_{\hat{\rho}_2}(x, p) \quad (3.13)$$

onde

$$W_{\hat{\rho}_j}(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho}_j | x - \frac{1}{2}\xi \rangle . \quad (3.14)$$

No caso de um estado puro,  $\hat{\rho}_j = |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|$  encontramos

$$Tr(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = Tr(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|) = |\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2 \quad (3.15)$$

E, a partir da equação (3.13), concluímos que

$$|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{|\Psi_1\rangle}(x, p) W_{|\Psi_2\rangle}(x, p) \quad (3.16)$$

significando que o módulo ao quadrado do produto escalar entre os estados quânticos  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  é o produto da função de Wigner  $W_{|\Psi_1\rangle}$  e  $W_{|\Psi_2\rangle}$  dos dois estados integrada em todo o espaço de fase.

Podemos provar a equação (3.13) substituindo a equação (3.14) nela, e trocando a ordem de integração.

$$\begin{aligned} I &\equiv 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_1}(x, p) W_{\hat{\rho}_2}(x, p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar}p(\xi_1+\xi_2)} \\ &\times \langle x + \frac{1}{2}\xi_1 | \hat{\rho}_1 | x - \frac{1}{2}\xi_1 \rangle \langle x + \frac{1}{2}\xi_2 | \hat{\rho}_2 | x - \frac{1}{2}\xi_2 \rangle . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podemos utilizar a função delta de Dirac dada pela equação (3.3) para integrarmos sobre p e com isso chegamos em

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho}_1 | x - \frac{1}{2}\xi \rangle \langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho}_2 | x - \frac{1}{2}\xi \rangle \quad (3.18)$$

onde, em seguida, a integração foi realizada sobre  $\xi_2$  e utilizamos a função delta com  $\xi_2 = -\xi_1 \equiv -\xi$ . Introduzindo agora uma mudança de variáveis,  $x'' = x + \frac{1}{2}\xi$  e  $x' = x - \frac{1}{2}\xi$  achamos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \langle x'' | \hat{\rho}_1 | x' \rangle \langle x' | \hat{\rho}_2 | x'' \rangle \quad (3.19)$$

como

$$1 = \int dx' |x'\rangle\langle x'|$$

, temos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \langle x'' | \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 | x'' \rangle = Tr(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) . \quad (3.20)$$

### 3.2.3 Valores negativos da Função de Wigner

Como mencionado anteriormente, a presença de um estado puramente quântico se refletirá no fato da função de Wigner apresentar valores negativos. Retornando à propriedade da equação (3.10) e supondo agora que temos duas matrizes densidade  $\hat{\rho}_1$  e  $\hat{\rho}_2$  tais que  $Tr(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = 0$ , concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_1}(x, p) W_{\hat{\rho}_2}(x, p) = 0 \quad , \quad (3.21)$$

ou seja, o produto de duas funções de Wigner integradas sobre todo o espaço de fase se anulam. Esta condição implica que  $W_{\hat{\rho}_1}(x, p)$  e/ou  $W_{\hat{\rho}_2}(x, p)$  admitem valores negativos. Este resultado impossibilita o entendimento da função de Wigner como uma verdadeira distribuição de probabilidades. Ainda assim, a função de Wigner é útil para calcular valores quânticos esperados.

Quando  $Tr(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) > 0$ , a equação (3.21) será positiva, permitindo assim a possibilidade de existirem casos em que ambas as funções de Wigner sejam positivas em todos os pontos e quando isso acontece a função de Wigner adquire todas as propriedades de uma distribuição de probabilidades no espaço de fase possibilitando inclusive uma descrição clássica do estado quântico.

## 3.3 A equação de Fokker-Planck

Uma pergunta natural a ser feita é: se o operador de densidade satisfaz a equação de von-Neumann, qual será a equação satisfeita pela função de Wigner?

Em muitos casos, especialmente para hamiltonianos quadráticos e cúbicos em certas aproximações, a função de Wigner satisfaz à equação de Fokker-Planck, que é uma equação diferencial parcial de difusão envolvendo termos de arraste.

A equação de Fokker-Planck foi inicialmente usada por Fokker e Planck para descrever o movimento Browniano das partículas. O nome é uma homenagem ao botânico *Robert Brown* que observou o movimento errático (aleatório) de partículas suspensas num líquido. O modelo matemático do movimento Browniano tem várias aplicações práticas como por exemplo flutuações no mercado de ações.

O movimento aleatório observado é devido a interação da partícula com átomos e moléculas presentes no fluido que colidem entre si constantemente. Detalhes sobre o tema podem ser

encontrados em [8].

A solução completa de um sistema macroscópico deveria consistir em resolver todas as equações microscópicas do sistema. Porém, nós não podemos, em geral, fazer com que isso ocorra. Somos então forçados a usar uma descrição *estocástica* para descrever o sistema. Nosso conhecimento do sistema é descrito por variáveis macroscópicas que flutuam de uma maneira aleatória. Assim, a equação de Fokker-Planck é apenas uma equação de movimento para a função de distribuição de variáveis aleatórias macroscópicas. A equação de Fokker-Planck pode ser entendida como uma equação de difusão com um termo de arraste.

Em uma variável ela possui a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x}D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{(2)}(x) \right] W(x) \quad , \quad (3.22)$$

onde  $D^{(2)}(x) > 0$  é o coeficiente de difusão e  $D^{(1)}$  é o coeficiente de arraste (*drift*). Os coeficientes acima podem, também, depender do tempo. Na literatura, (3.22) também é conhecida como equação de Kolmogorov.

Uma generalização de (3.22) pode ser feita para  $N$  variáveis.

$$\frac{\partial}{\partial t}W(\{x\}, t) = \left[ -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}D_i^{(1)}(\{x\}, t) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}D_{ij}^{(2)}(\{x\}, t) \right] W(\{x\}, t) \quad , \quad (3.23)$$

onde, agora,  $D_i^{(1)}(\{x\})$  é o vetor de arraste,  $D_{ij}^{(2)}(\{x\})$  é o tensor de difusão e, no geral, ambos dependem das  $N$  variáveis  $x_1, \dots, x_N = \{x\}$ .

Para uma distribuição determinística (tipo Liouville) poderíamos desprezar as flutuações das variáveis macroscópicas. Em termos da equação de Fokker-Planck, isso seria desprezar o termo de difusão.

Podemos ainda escrever a equação (3.23) como

$$\frac{\partial}{\partial t}W = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}J_i \quad , \quad (3.24)$$

que tem a mesma forma da equação da Continuidade ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ ), onde, nesse caso,  $J_i$  representa a  $i$ -ésima componente da corrente de probabilidade. Comparando (3.24) com (3.23) vemos que

$$J_i = D_i^{(1)}(\{x\}, t) W(\{x\}, t) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\{x\}, t) W(\{x\}, t) \quad (3.25)$$

Em muitos casos é muito difícil resolver a equação de Fokker-Planck completamente, porém, se procurarmos por estados estacionários podemos lidar de forma simplificada com a equação (3.23). Estados estacionários são alcançados depois de um certo tempo (transiente) que a partícula está sofrendo a ação da dissipação. Nesse momento, não há mais uma evolução temporal, o sistema atinge um equilíbrio ficando independente do tempo. Matematicamente, dizemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\{x\}, t) = 0 \quad , \quad (3.26)$$

ou seja,  $J_i$  deve ser uma constante. Mais precisamente, podemos dizer que, devido as condições de contorno que devem ser satisfeitas no infinito,  $J_i$  deve ser igual a zero mostrando-se como uma função bem comportada. Assim, (3.24) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \sum_j D_{ij}^{(2)} \frac{\partial W}{\partial x_j} = D_i^{(1)} W - \frac{1}{2} \sum_j W \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^{(2)} \quad . \quad (3.27)$$

Supondo que  $D_{ij}^{(2)}$  é invertível, temos que

$$\left( D^{(2)} \left( D^{(2)} \right)^{-1} \right)_{ij} = \sum_k D_{ik}^{(2)} \left( D_{kj}^{(2)} \right)^{-1} = \delta_{ij} \quad , \quad (3.28)$$

e (3.27) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \sum_k \sum_j D_{ik}^{(2)-1} D_{kj}^{(2)} \frac{\partial W}{\partial x_j} = W \left[ \sum_k D_{ik}^{(2)-1} \left( D_k^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} D_{kj}^{(2)} \right) \right] \quad . \quad (3.29)$$

Lembrando que

$$\frac{\partial \ln(x)}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial y} \quad ,$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \ln(W(\{x\})) \equiv Z_i \quad , \quad (3.30)$$

onde

$$Z_i = \sum_k D_{ik}^{(2)-1} \left( 2D_k^{(1)} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} D_{kj}^{(2)} \right) \quad . \quad (3.31)$$

Repare que  $\frac{\partial}{\partial x_j} \ln(W(\{x\}))$  é uma componente do gradiente de  $Z_i$ . Em termos vetoriais, temos que  $\vec{Z}$  é a divergência de uma certa função.

$$\vec{Z} = \vec{\nabla} \ln(W(\{x\})) \quad . \quad (3.32)$$

Usando a identidade que diz que o rotacional do gradiente de uma função é zero, concluímos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{Z} = 0 \quad , \quad (3.33)$$

assim, voltando a linguagem de componentes, a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução estacionária é

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial Z_j}{\partial x_i} \quad . \quad (3.34)$$

Esta condição é conhecida como “Solução Potencial” (*Potential Solution*) devido ao fato de termos encontrado uma função que pode ser escrita como o gradiente de outra.

Finalmente, a solução estacionária será dada por

$$W(\{x\}) = N e^{\int^x d\vec{x}' \cdot \vec{Z}} \quad . \quad (3.35)$$

Concluímos, então, que obter uma expressão para a evolução temporal desde o início até o regime estacionário nem sempre será possível. Entretanto, buscar a distribuição de probabilidade no regime estacionário pode ser feito na maioria dos casos, e a única informação perdida é sobre o período transiente até o equilíbrio.

## Capítulo 4

# O OSCILADOR PARAMÉTRICO ÓPTICO NÃO-DEGENERADO

Em sua maioria, o laser é um dispositivo óptico-eletrônico que emite luz **coerente**. O termo laser é um acrônimo para “*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*”. Um laser típico emite radiação eletromagnética muito intensa numa faixa de frequência muito pequena, sendo considerado como uma fonte quase monocromática que quase não diverge em curtas distâncias (distâncias menores que centenas de metros). O laser tem várias aplicações práticas, dentro e fora da física.

Na física, ele foi responsável pelo surgimento de um novo ramo da óptica, a óptica não-linear, que descreve o comportamento da luz em meios não-lineares como nuvens atômicas (gases) ou cristais não-lineares. Assim, nesses meios, a polarização  $\vec{P}$  responde de forma não-linear ao campo elétrico  $\vec{E}$  proveniente da luz que incide no cristal. Para fenômenos ópticos não-lineares serem percebidos, é necessário, em geral, a utilização de uma fonte luminosa com alta intensidade como por exemplo, o laser.

Neste capítulo abordamos o dispositivo óptico de interesse em nosso estudo, chamado oscilador paramétrico óptico - **OPO**. Sua aplicação fundamental baseia-se no fato de que esse dispositivo é capaz de gerar estados não clássicos da luz como, por exemplo, estados emaranhados.

## 4.1 O Oscilador Paramétrico

Um oscilador paramétrico é um oscilador harmônico simples cuja frequência de ressonância e amortecimento variam no tempo de forma definida. Matematicamente, poderíamos escrever

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta(t) \frac{dx}{dt} + \omega^2(t) x = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Aplicando uma mudança de variáveis,

$$q(t) \equiv e^{D(t)} x(t) \quad , \quad (4.2)$$

onde  $D(t)$  é a integral temporal do amortecimento

$$D(t) \equiv \frac{1}{2} \int^t \beta(t') dt' \quad , \quad (4.3)$$

cuja mudança de variáveis leva a uma equação diferencial na qual o termo de dissipação foi eliminado

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \Omega^2(t) q = 0 \quad , \quad (4.4)$$

onde  $\Omega$  é a frequência transformada dada por

$$\Omega^2(t) = \omega^2(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{d\beta}{dt} \right) - \frac{1}{4} \beta^2 \quad . \quad (4.5)$$

No geral, as variações no amortecimento e na frequência podem ser consideradas como pequenas perturbações e são escritas

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \omega_0 [b + g(t)] \\ \omega^2(t) &= \omega_0^2 [1 + h(t)] \quad . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Desse modo,

$$\Omega^2(t) = \omega_n^2 [1 + f(t)] \quad , \quad (4.7)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural do oscilador harmônico amortecido dado por

$$\omega_n^2 \equiv \omega_0^2 \left( 1 - \frac{b^2}{4} \right) \quad . \quad (4.8)$$

Concluimos, então, que a equação diferencial modificada é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) + \omega_n^2 [1 + f(t)] q = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Um caso particular do oscilador paramétrico é abordado por Barros [9], no qual  $f(t) = \eta \cos(\omega t)$ .

## 4.2 Descrição geral sobre o OPO

O oscilador paramétrico óptico é assim denominada, porque oscila em frequências ópticas, convertendo uma onda laser que entra no dispositivo (chamada de bombeamento ou em inglês *pump*) em duas, ou mais, ondas de saída chamadas de sinal (*signal*) e complementar (*idler*) (quando há apenas duas ondas saindo) por meio de um processo não-linear. Nessa operação há conservação de energia, verificada pela soma das frequências de saída igual à frequência de entrada, além da conservação do momento linear.

A construção de um OPO, consiste, basicamente, em um ressonador óptico ou cavidade óptica na qual é inserido um cristal não-linear. Essa cavidade óptica é um arranjo de espelhos que forma uma cavidade para a onda eletromagnética. Os espelhos semi-transparentes permitem a entrada do feixe bombeado e saída dos feixes convertidos, além de possibilitar uma realimentação devido aos feixes refletidos que não saíram da cavidade. O cristal não-linear, em conjunto com o laser, é responsável pelo processo não-linear que transforma um único feixe incidente em dois outros feixes.

Além disso, o OPO pode ser utilizado para criação de **estados comprimidos** ou, em inglês, *squeezed states*) assim como estados emaranhados, integrando a óptica quântica diretamente com a **Informação Quântica**. Demonstrações de protocolos de variáveis contínuas na informação quântica foram realizados utilizando OPO's [10, 11, 12, 13].

## 4.3 Processos Ópticos Não-Lineares

Em 1961, pouco depois da demonstração do laser, Franken *et al.* [15] demonstraram a geração do segundo harmônico de um laser de rubi em um cristal de quartzo. O sucesso desse experimento foi diretamente relacionado com o aumento da potência proveniente de uma fonte de laser comparada com fontes incoerentes, onde potências com intensidades maiores que  $10^9 \frac{W}{cm^2}$  tornaram-se disponíveis. Isto corresponde ao módulo de um campo elétrico de aproximadamente  $10^6 \frac{V}{cm}$ , cuja intensidade é da ordem de grandeza aproximada à força entre campos atômicos. Como consequência, materiais respondiam de forma não linear quando submetidos a esses campos intensos. No entanto, o processo de geração do segundo harmônico não é o único processo não-linear que pode acontecer, podendo ser citados de forma geral, a soma de frequências (*sum-*

*frequency generation*), a subtração de frequência (*difference-frequency generation*) e a mistura de quatro ondas (*four wave mixing*).

Quando um meio é sujeito a um campo elétrico, os elétrons desse meio são polarizados. Para campos elétricos fracos a polarização é proporcional ao campo,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}$$

onde  $\chi^{(1)}$  é a susceptibilidade óptica e  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo. A equação acima é apenas uma aproximação para o caso em que o campo aplicado é fraco. Quando são considerados campos mais intensos, deve-se levar em conta a não-linearidade da polarização, que pode ser escrita em termos de uma série de potências. Os termos de susceptibilidades devem ser tratados como tensores, já que o ângulo da polarização pode ser diferente do ângulo de polarização do feixe. Assim, a componente  $i$  da polarização é dada por,

$$\begin{aligned} \left(\vec{P}(t)\right)_i &= \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \\ &\equiv \left(\vec{P}^{(1)}(t)\right)_i + \left(\vec{P}^{(2)}(t)\right)_i + \left(\vec{P}^{(3)}(t)\right)_i + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $\chi^{(2)} = \chi_{ijk}$  e  $\chi^{(3)} = \chi_{ijkl}$  são conhecidas como tensores de susceptibilidades ópticas não-lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente.

### 4.3.1 Descrições de Interações Ópticas Não-Lineares

#### Geração de Segundo Harmônico

Ao incidir um feixe monocromático de frequência  $\omega$  em um cristal, podemos escrever o seu campo elétrico como sendo

$$\vec{E}(t) = \vec{E} e^{-i\omega t} + \vec{E}^* e^{i\omega t} \quad , \quad (4.11)$$

onde a susceptibilidade de segunda ordem  $\chi^{(2)}$  é diferente de zero. A polarização não-linear que é criada em tal cristal será a  $\vec{P}^{(2)}(t)$ , dada pela equação (4.10). Como  $\vec{P}^{(2)}(t) = \chi^{(2)} \vec{E}^2(t)$ , temos que

$$\vec{P}^{(2)}(t) = 2\chi^{(2)} \vec{E} \vec{E}^* + \chi^{(2)} \left( E^2 e^{-2i\omega t} + E^{*2} e^{2i\omega t} \right) \quad . \quad (4.12)$$

Pode-se perceber, então, que a polarização de segunda ordem consiste em uma contribuição de frequência zero (o primeiro termo) e uma contribuição de frequência  $2\omega$  (o segundo termo).

Esse segundo termo é o responsável pela criação de uma onda eletromagnética cuja frequência é o dobro da onda incidente. O primeiro termo da equação acima, por sua vez, não leva ao processo de criação do segundo harmônico. Com efeito, ele não contribui para a criação de radiação, uma vez que sua derivada segunda no tempo é zero e, assim, não satisfaz a equação da onda. Na verdade, ele leva a um processo chamado retificação óptica, no qual um campo elétrico estático é criado polarizando o cristal. Um uso comum da geração de segundo harmônico é a geração de luz coerente em frequência diferente do laser, devido ao processo não-linear de interação da radiação com o cristal. Um feixe (na faixa do visível) pode ser criado a partir de um feixe infravermelho.

Com uma visualização quântica, a geração de segundo harmônico pode ser entendida como a criação de um fóton de frequência  $2\omega$ , ao mesmo tempo em que dois fótons de frequência  $\omega$  são destruídos em um processo que ocorre simultaneamente. Cabe ressaltar que não há a necessidade de conservação da quantidade de fótons, apenas a conservação da energia. Em termos de operadores de criação e aniquilação, teríamos uma parte do hamiltoniano descrevendo a interação da radiação com a matéria dado por

$$\hat{H} = C \left( \hat{a}_\omega \hat{a}_\omega \hat{a}_{2\omega}^\dagger + \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{2\omega} \right) \quad , \quad (4.13)$$

onde  $C$  denota uma constante com dimensão de energia e  $\hat{a}_\omega^\dagger$  e  $\hat{a}_\omega$  são, respectivamente os operadores de criação e destruição no modo de frequência  $\omega$ . O índice  $\omega$  ou  $2\omega$  evidencia apenas a frequência do fóton que está sendo criado ou destruído. Importante perceber que este hamiltoniano é hermiteano, configurando, assim, uma grandeza mensurável, detalhado por Drummond, McNeil e Walls em [16] e [17].

### Soma e Diferença de Frequências

Nesse caso, o cristal não-linear será incidido por dois feixes monocromáticos cujas frequências valem, respectivamente,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Assim, o campo elétrico incidente pode ser representado por

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \vec{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad , \quad (4.14)$$

onde  $c.c.$  denota “complexo conjugado”.

Fazendo uso de (4.10) a contribuição não-linear será  $\vec{P}^{(2)}(t) = \chi^{(2)} \vec{E}^2(t)$ , que levará ao termo

de polarização não-linear dado por

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(2)}(t) = & \chi^{(2)} [ E_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + E_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \\ & + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c. ] + 2\chi^{(2)} [ E_1 E_1^* + E_2 E_2^* ] \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Expressando a equação acima em uma notação conveniente,

$$\vec{P}^{(2)}(t) = \sum_n \vec{P}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad , \quad (4.16)$$

onde o limite do somatório se estende por todas as frequências  $\omega_n$ , positivas e negativas.

Nesse caso, há várias possibilidades de processos não-lineares, como por exemplo: a geração de segundo harmônico cujas amplitudes são  $\chi^{(2)} E_1^2$  e  $\chi^{(2)} E_2^2$ , que possuem frequências iguais a  $2\omega_1$  e  $2\omega_2$ , respectivamente; uma soma de frequência cuja amplitude vale  $2\chi^{(2)} E_1 E_2$  e frequência  $(\omega_1 + \omega_2)$ ; a diferença de frequência com valor de amplitude correspondente a  $2\chi^{(2)} E_1 E_2^*$  e frequência  $(\omega_1 - \omega_2)$ ; e o processo de retificação óptica, cuja amplitude é  $2\chi^{(2)} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*)$  e não possui frequência (campo estático).

A grande pergunta é: podemos ter todos esses processos ocorrendo ao mesmo tempo em um experimento?

Muito embora a resposta à pergunta seja sim, apenas um dos processos será observado, já que os demais terão suas amplitudes rapidamente zeradas. Isso ocorre porque o cristal será cortado de tal maneira a favorecer somente um tipo de processo. Assim, ocorrerá o casamento de fase (*phase matching*) para o processo de interesse enquanto os outros sofrerão de um descasamento de fase. A condição para ocorrer o casamento de fase é  $\vec{K}_0 = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ , onde  $\vec{K}$  é o vetor de onda e os índices representam os modos.

Se o casamento de fase não for perfeito entre a onda incidente e a onda de polarização, ocorrerá uma rápida diminuição na intensidade da onda devido à interferência destrutiva entre a onda produzida anteriormente e a que está sendo produzida, conforme descrito por Boyd [14]. Dessa forma, explica-se porque somente um processo ocorre de forma significativa dentro do cristal e porque o casamento de fase é tão importante. Como cada processo possuirá uma frequência diferente, tais como  $2\omega_1$ ,  $(\omega_1 + \omega_2)$  etc, e devido à dispersão, cada um dos feixes vai ter uma velocidade de propagação diferenciada dos outros, fazendo com que o descasamento de fase naturalmente ocorra, tornando assim, o cristal propício para somente um único tipo de

processo. Se o cristal foi feito para geração de segundo harmônico, a soma e diferença de fases não vão ser processos vistos usando aquele cristal.

Para o sistema tratado neste trabalho, temos a criação de dois feixes de frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , onde  $\omega_1 = \omega_2$ , a partir da entrada de um feixe de frequência  $\omega_0$ . Por mais que as frequências de saídas sejam iguais, os índices são representados de formas diferentes, pois a polarização dos fótons produzidos são ortogonais entre si. Assim, haverá um sistema degenerado em frequências mas não degenerado na polarização. Esse fato também está relacionado com o tipo do cristal, que nesse caso é chamado de Cristal de Tipo II. Quanto à assertiva de que um único feixe é capaz de gerar outros dois feixes com frequências diferentes da sua, se deve ao fato de termos que levar em consideração as flutuações de vácuo. Elas são responsáveis pelos modos que se acoplam ao feixe bombeador (*pump*) gerando assim dois outros feixes sinal (*signal*) e complementar (*idler*) que saem do cristal, no processo espontâneo.

Para esse sistema e processo, podemos escrever um Hamiltoniano em termos de operadores de criação ( $\hat{a}^\dagger$ ) e aniquilação ( $\hat{a}$ ).

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{j=0}^2 \hbar \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + i\hbar \chi (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger) \\ & + i\hbar (\varepsilon e^{-i\omega_0 t} \hat{a}_0^\dagger - \varepsilon^* e^{i\omega_0 t} \hat{a}_0) + \hbar \sum_{j=0}^2 (\hat{a}_j \hat{\Gamma}_j^\dagger + \hat{a}_j^\dagger \hat{\Gamma}_j) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Esse hamiltoniano é composto por quatro termos. O primeiro termo é o conhecido hamiltoniano de um oscilador harmônico, que descreve a parte livre do sistema modelado como osciladores hamônicos livres.

O segundo termo descreve a interação não-linear, em que há uma interação entre os diferentes modos e ocorre o processo de destruição de um fóton no modo 0, referente à  $\omega_0$ , e, simultaneamente, a criação de dois fótons nos modos 1 e 2, referentes às frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . O processo inverso também é possível, porém bem menos provável devido ao modo de frequência  $\omega_0$  estar sendo bombeado e a população de fótons de frequência  $\omega_0$  ser muito maior. Assim, o processo  $\omega_0 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$  será bem mais provável do que o processo no qual dois fótons cujas frequências são  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são destruídos ao mesmo tempo em que um fóton com frequência  $\omega_0$  é criado. A parte do segundo termo que representa esse processo é a que possui o sinal negativo. A constante  $\chi$  é a constante de não-linearidade do sistema, que acopla modos de diferentes frequências.

O terceiro termo do Hamiltoniano é referente ao bombeamento do sistema, em que  $\epsilon$  é a intensidade dele. Esse parâmetro pode ser variado experimentalmente e será responsável por regular em que regime o OPO trabalhará (abaixo, acima, ou no limiar, como será visto no próximo capítulo). O quarto termo modela a dissipação, acoplando os modos da cavidade com os modos externos, transformando-os, assim, em um sistema aberto.

O manejo desse hamiltoniano é, de certa forma, difícil. A teoria das representações será utilizada na forma das equações (3.2) e (3.3), ou seja, será usada a representação de Wigner para a matriz densidade que satisfaz a equação de movimento

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (4.18)$$

para obtermos

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_W(Z, Z^*, t) = Tr \left( \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] e^{iZ^* \hat{a}^\dagger + iZ \hat{a}} \right) , \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \hbar \sum_{j=0}^2 \omega_j (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j) + i\hbar \chi (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger) \right\} + \\ &\frac{1}{i\hbar} \left\{ \epsilon e^{-i\omega_0 t} (\hat{a}_0^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_0^\dagger) - \epsilon^* e^{i\omega_0 t} (\hat{a}_0 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_0) \right\} + \\ &\frac{1}{i\hbar} \left\{ \hbar \sum_{j=0}^2 (\hat{a}_j \hat{\Gamma}_j^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_j \hat{\Gamma}_j^\dagger + \hat{a}_j^\dagger \hat{\Gamma}_j \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger \hat{\Gamma}_j) \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para tratar a equação (4.20), serão utilizadas algumas relações bem conhecidas que podem ser facilmente demonstradas, de forma que a equação mestra acima será simplificada. Decerto, existe um outro caminho formal e bastante extenso, que também pode ser utilizado, como mostrado no apêndice B, para elucidar como seria essa outra derivação para a equação de Fokker-Planck. Serão realizadas as correspondências entre operadores que aparecem na matriz densidade e amplitudes complexas presentes na distribuição de Wigner. Para mais detalhes, vide Gardiner [18].

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{\rho} &\leftrightarrow \left( \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) W(\alpha, \alpha^*) \\ \hat{a}^\dagger \hat{\rho} &\leftrightarrow \left( \alpha^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W(\alpha, \alpha^*) \\ \hat{\rho} \hat{a} &\leftrightarrow \left( \alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) W(\alpha, \alpha^*) \end{aligned}$$

$$\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \leftrightarrow \left( \alpha^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W(\alpha, \alpha^*) \quad (4.21)$$

Usando essas correspondências na representação de Wigner, a distribuição no espaço das amplitudes  $\{\alpha_i\}$  e  $\{\alpha_i^*\}$  que corresponde à equação mestra (4.18) no sentido de fornecer as mesmas médias de operadores em ordem simétrica é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_0} (\gamma_0 \alpha_0 + \chi \alpha_1 \alpha_2 - \epsilon) + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} (\gamma_0 \alpha_0^* + \chi \alpha_1^* \alpha_2^* - \epsilon^*) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\gamma_1 \alpha_1 - \chi \alpha_2^* \alpha_0) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} (\gamma_1 \alpha_1^* - \chi \alpha_2 \alpha_0^*) \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\gamma_2 \alpha_2 - \chi \alpha_1^* \alpha_0) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} (\gamma_2 \alpha_2^* - \chi \alpha_1 \alpha_0^*) \\ & + \gamma_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_0 \alpha_0^*} + \gamma_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \alpha_1^*} + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \alpha_2^*} \\ & \left. + \frac{\chi}{4} \left( \frac{\partial^3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \partial \alpha_0^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_1^* \partial \alpha_2^* \partial \alpha_0} \right) \right\} W \quad . \quad (4.22) \end{aligned}$$

Que é uma equação diferencial que, quando resolvida, dará a função de Wigner para o sistema em função do tempo. Um dos problemas da equação acima é o termo de derivada cúbica, que faz com que ela não possa ser reconhecida como uma equação de Fokker-Planck. Essa equação é o início deste trabalho inédito, cujo objetivo é aproximá-la a uma equação de Fokker-Planck com o intuito de encontrar uma solução exata para a função de Wigner independente do tempo.

Essa função de Wigner será a distribuição de probabilidades do sistema aqui tratado e, com ela, será possível calcular valores esperados quânticos utilizando técnicas clássicas, além de ser obtida intuição física do problema através de sua forma matemática final.

Mesmo com todas as técnicas utilizadas até o momento, resolvê-la de forma dependente do tempo é uma tarefa difícil. Como há dissipação, é fisicamente esperado que o sistema atinja um regime estacionário (de equilíbrio) depois de um tempo de transiente. Por isso, deve-se buscar uma solução estacionária, que facilitará os cálculos e permitirá uma solução analítica. Nessa aproximação toda a informação de como o sistema atinge o estado de equilíbrio é perdida durante este período de transiente e isso pode ocultar possíveis interferências quânticas que, por decoerência, desaparecem durante o transiente.

## 4.4 Soluções Clássicas do OPO

O OPO pode operar em três regimes diferentes: abaixo do limiar, no limiar e acima do limiar. Utilizando as equações de Itô (5.4), pode ser feita uma análise das soluções clássicas estacionárias ( $dW = 0$ ), com o intuito de mostrar que há um limiar em  $\mu = 1$  para o OPO. Mais à frente  $\mu$  será caracterizado em termos da intensidade do bombeamento no OPO.

Analisando novamente as equações de Itô (5.4), percebe-se que há uma solução estacionária abaixo do limiar com  $\alpha_0 = \frac{\epsilon}{\gamma_0}$  pois  $\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2 \rangle = 0$ .

Acima do limiar, a solução estacionária dá

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\chi}{\gamma} \alpha_2 \alpha_0 \\ \alpha_2 &= \frac{\chi}{\gamma} \alpha_1 \alpha_0\end{aligned}\tag{4.23}$$

Devido à simetria entre as equações de Itô vê-se que  $\alpha_1 = \alpha_2$  e, conseqüentemente,  $\alpha_0 = \frac{\gamma}{\chi}$ . Voltando à primeira das equações de Itô, obtém-se

$$\epsilon - \gamma_0 \alpha_0 - \chi \alpha_1^2 = 0\tag{4.24}$$

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\chi} \left( \epsilon - \frac{\gamma_0}{\chi} \right)} = \pm \sqrt{\frac{1}{\chi} (\epsilon - E_c)}\tag{4.25}$$

Assim, vê-se nas figuras 4.1 e 4.2 como a amplitude do modo bombeado e a amplitude dos modos amplificados variam com a intensidade do feixe bombeado respectivamente. Os sinais  $\pm$  indicam as possíveis fases de  $\alpha$ :  $e^{-i0}$  e  $e^{-i\pi}$ .

Existem dois grupos principais de transição de fase: a transição de fase de primeira ordem e a transição de fase de segunda ordem.

A primeira, está associada a um calor latente. Durante a transição, o sistema absorve (ou libera) uma certa quantidade fixa de energia. Ao longo do processo, a temperatura do sistema permanece constante. A transição de fase de primeira ordem está associada a uma descontinuidade, caracterizada por uma mudança abrupta nas propriedades do sistema. Na transição de fase de segunda ordem, o estado do sistema muda de forma contínua e as flutuações aparecem de forma muito intensa em torno do ponto crítico.

No sistema que estamos estudando, temos uma transição de fase de segunda ordem e, por isso, uma transição contínua entre certos regimes de operação do OPO (abaixo, no e acima do limiar).

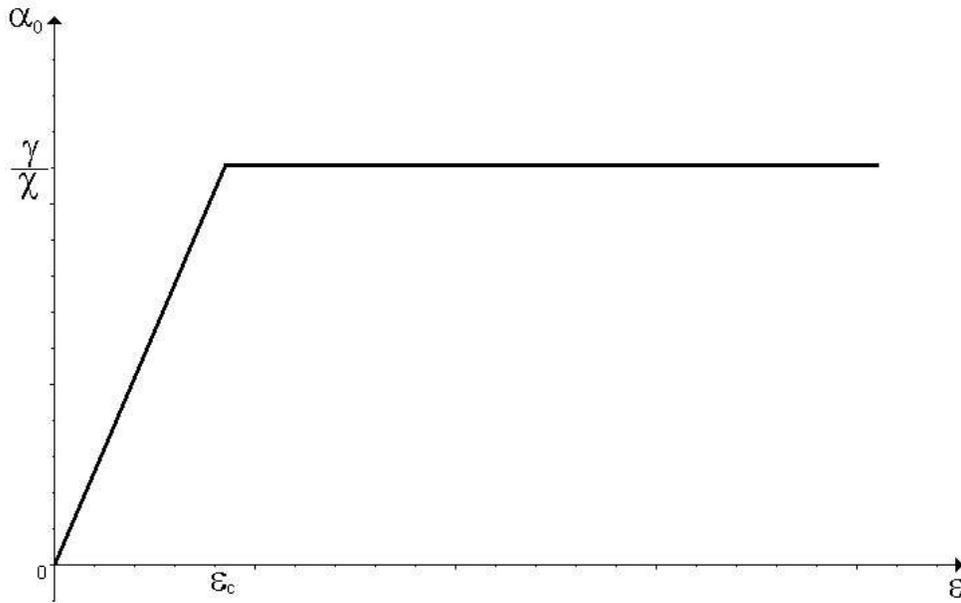


Figura 4.1: Gráfico da amplitude do modo bombeado no OPO em função do bombeamento. Acima do limiar a amplitude fica fixada em  $\frac{\gamma}{\kappa}$ , independentemente de  $\epsilon$ .

Dizer que estamos trabalhando abaixo do limiar, significa informar que a intensidade do feixe bombeado para dentro da cavidade não é suficiente para “enchê-la” totalmente, de modo que os feixes sinal e complementar sejam expelidos como feixes coerentes. Ao contrário, o que ocorre é a saída de uma luminescência.

A medida que aumentamos a intensidade do bombeamento, o sistema fica cada vez mais próximo do limiar. Quando atingimos o limiar, estamos no ponto crítico, onde ocorre a transição de fase e a partir daí os feixes que emergem da cavidade são coerentes, possuem um campo médio diferente de zero.

## 4.5 Quadraturas e “Squeezing”

Uma onda eletromagnética pode ser representada com amplitude complexa. Grandezas complexas não são mensuráveis na mecânica quântica, por isso, buscamos uma nova representação pra um mensurável dessas grandezas. Definimos um operador generalizado de quadratura como a seguinte combinação dos operadores de criação e aniquilação:

$$\hat{X}(\theta) = \hat{a}^\dagger e^{i\theta} + \hat{a} e^{-i\theta} \quad (4.26)$$

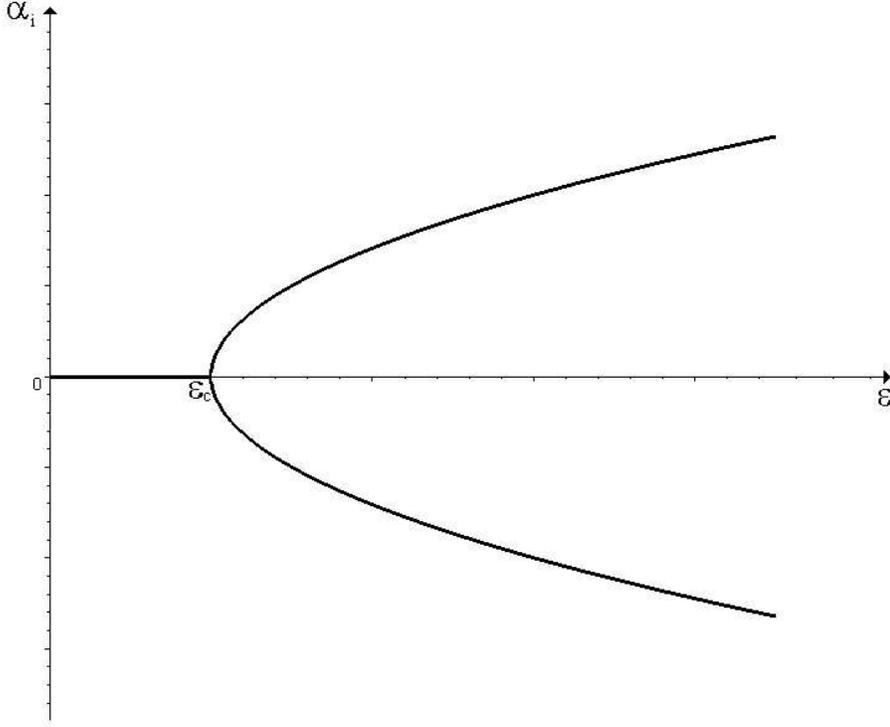


Figura 4.2: Amplitude dos modos amplificadas, intacavidade, em função do bombeamento. Abaixo do limiar  $\epsilon_c$  apenas flutuações quânticas estão presentes na cavidade e acima de  $\epsilon_c$  vemos a presença de campos macroscópicos. Os dois ramos indicam as duas possíveis fases de  $\alpha$ .

Dois exemplos simples, e que iremos utilizar são para  $\theta = 0$  e para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 = \hat{X}(0) &= \hat{a}^\dagger + \hat{a} \\ \hat{Y}_1 = \hat{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -i(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\end{aligned}\quad (4.27)$$

A importância desses operadores é que eles são hermiteanos e, portanto, observáveis. É possível realizar medidas experimentais e medir um valor da quadratura.

Como os operadores de criação e aniquilação podem ser escritos em termos dos operadores de quadraturas, é fácil verificar que as suas incertezas obedecem a

$$\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle \langle \Delta \hat{Y}_1^2 \rangle \geq 1 \quad . \quad (4.28)$$

Quando temos um estado coerente,  $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle = \langle \Delta \hat{Y}_1^2 \rangle = 1$ , porém, há casos em que a incerteza em uma quadratura é diferente da incerteza da outra quadratura. Há ainda casos em que o produto das incertezas é maior que 1, como, por exemplo, no caso de uma luz térmica, onde essa relação não obedece ao mínimo de incerteza, trazendo um resultado onde  $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle \langle \Delta \hat{Y}_1^2 \rangle > 1$ .

Interessante perceber que o produto entre as incertezas precisa ser maior que 1. Mas nada impede que  $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle$  seja menor que 1, contanto que  $\langle \Delta \hat{Y}_1^2 \rangle$  seja suficientemente grande para que o produto entre eles não viole o princípio da incerteza de Heisenberg. Quando isso acontece, dizemos que uma das quadraturas sofreu *squeezing*, enquanto a outra sofreu um *anti-squeezing*. O ruído em uma das quadraturas foi diminuído ao custo do aumento do ruído na outra quadratura.

O operador de *squeezing* pode formalmente ser definido como

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{a}^{\dagger 2}} \quad . \quad (4.29)$$

É fácil mostrar que

$$S(\xi) = S^{-1}(\xi) = S(-\xi) \quad . \quad (4.30)$$

No próximo capítulo utilizaremos os conceitos apresentados aqui para aplicarmos no nosso problema em estudo.

## Capítulo 5

# FUNÇÃO DE WIGNER DE DOIS MODOS AMPLIFICADOS EM UM OPO NÃO-DEGENERADO

Uma solução estacionária da equação (4.22) será buscada. Nesse regime,  $W$  não deve depender do tempo, ou seja,  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ . Além disso, serão eliminadas adiabaticamente as variáveis do modo bombeado pelo laser. A justificativa física para tal é que, depois de um período de transiente, o modo do bombeamento atinge um regime estacionário bem antes dos outros modos atingirem esse estado. Outra aproximação é a eliminação dos termos de derivada de terceira ordem, justificada pelo fato da variação da função ser muito menor comparada com termos de derivada segunda, além de  $\chi$  (a não linearidade do cristal) ser muito pequena.

### 5.1 Equações Diferenciais Estocásticas

A equação de Fokker-Planck é equivalente a um conjunto de equações diferenciais estocásticas (SDE). As equações diferenciais estocásticas de Itô, equivalentes à equação multidimensional de Fokker-Planck, são dadas por

$$dx_j = A(x_j) dt + B(x_j) dW \quad , \quad (5.1)$$

onde  $B(x)$  é definida pela decomposição

$$D(x) = B(x) B(x)^T \quad (5.2)$$

da matriz positivamente definida  $D(x)$ . A parte aleatória é representada pelo termo  $dW$ , que é o vetor incremento de Wiener. Assim, pode ser feita a primeira aproximação em (4.22) eliminando os termos de derivada cúbica com o intuito de encontrar um equação de Fokker-Planck.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_0} (\gamma_0 \alpha_0 + \chi \alpha_1 \alpha_2 - \epsilon) + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} (\gamma_0 \alpha_0^* + \chi \alpha_1^* \alpha_2^* - \epsilon^*) \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\gamma_1 \alpha_1 - \chi \alpha_2^* \alpha_0) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} (\gamma_1 \alpha_1^* - \chi \alpha_2 \alpha_0^*) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\gamma_2 \alpha_2 - \chi \alpha_1^* \alpha_0) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} (\gamma_2 \alpha_2^* - \chi \alpha_1 \alpha_0^*) \\
&\left. + \gamma_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_0 \alpha_0^*} + \gamma_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \alpha_1^*} + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \alpha_2^*} \right\} W \quad . \quad (5.3)
\end{aligned}$$

É possível, então, encontrar um conjunto de equações diferenciais estocásticas - **SDE** associado a essa equação de Fokker-Planck. Dechoum *et al.* [19] utilizaram a representação P-positiva e em seguida a distribuição de Wigner e encontraram um sistema de SDE como aqui apresentado. Em seguida, foi utilizada uma expansão perturbativa para calcular valores esperados das flutuações nas quadraturas. Martinelli *et al.* [20] faz uma revisão sobre o OPO, descrevendo sua operação e medindo as correlações quânticas entre os feixes de luz gerados pelo dispositivo e também apresentaram um conjunto de SDE como apresentado em (5.4).

$$\begin{aligned}
d\alpha_0 &= (\epsilon - \gamma_0 \alpha_0 - \chi \alpha_1 \alpha_2) dt + \sqrt{\gamma_0} dW_0 \\
d\alpha_0^* &= (\epsilon^* - \gamma_0 \alpha_0^* - \chi \alpha_1^* \alpha_2^*) dt + \sqrt{\gamma_0} dW_0^* \\
d\alpha_1 &= (-\gamma_1 \alpha_1 + \chi \alpha_2^* \alpha_0) dt + \sqrt{\gamma_1} dW_1 \\
d\alpha_1^* &= (-\gamma_1 \alpha_1^* + \chi \alpha_2 \alpha_0^*) dt + \sqrt{\gamma_1} dW_1^* \\
d\alpha_2 &= (-\gamma_2 \alpha_2 + \chi \alpha_1^* \alpha_0) dt + \sqrt{\gamma_2} dW_2 \\
d\alpha_2^* &= (-\gamma_2 \alpha_2^* + \chi \alpha_1 \alpha_0^*) dt + \sqrt{\gamma_2} dW_2^* \quad . \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Os incrementos de Wiener satisfazem às relações  $\langle dW_i \rangle = 0$  e  $\langle dW_i dW_j \rangle = \delta_{ij} dt$ .

Uma vez que o modo bombeado pelo laser possui um fator de dissipação muito maior do que os outros modos ( $\gamma_0 \gg \gamma_1$  e  $\gamma_2$ ), ele atinge o estado estacionário muito mais rapidamente que os outros dois modos. Assim, pode ser feito  $d\alpha_0 = d\alpha_0^* = 0$  nas duas primeiras equações de (5.4), levando a uma relação entre  $\alpha_0$  ( $\alpha_0^*$ ) e  $\alpha_1$  ( $\alpha_1^*$ ) e  $\alpha_2$  ( $\alpha_2^*$ ).

$$\alpha_0 = \frac{\epsilon}{\gamma_0} - \frac{\chi}{\gamma_0} \alpha_1 \alpha_2 \quad , \quad e,$$

$$\alpha_0^* = \frac{\epsilon^*}{\gamma_0} - \frac{\chi}{\gamma_0} \alpha_1^* \alpha_2^* \quad (5.5)$$

ou seja, estamos assumindo que o modo bombeado atinge o estado de equilíbrio dado por (5.3) quase que instantaneamente.

Com a eliminação das variáveis do modo bombeado chega-se a uma nova equação diferencial parcial (equação de Fokker-Planck) para a função de Wigner.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \gamma_1 \alpha_1 - \chi \alpha_2^* \left( \frac{\epsilon}{\gamma_0} - \frac{\chi}{\gamma_0} \alpha_1 \alpha_2 \right) \right] \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \left[ \gamma_1 \alpha_1^* - \chi \alpha_2 \left( \frac{\epsilon^*}{\gamma_0} - \frac{\chi}{\gamma_0} \alpha_1^* \alpha_2^* \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[ \gamma_2 \alpha_2 - \chi \alpha_1^* \left( \frac{\epsilon}{\gamma_0} - \frac{\chi}{\gamma_0} \alpha_1 \alpha_2 \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} \left[ \gamma_2 \alpha_2^* - \chi \alpha_1 \left( \frac{\epsilon^*}{\gamma_0} - \frac{\chi}{\gamma_0} \alpha_1^* \alpha_2^* \right) \right] \\ & \left. + \gamma_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \alpha_1^*} + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \alpha_2^*} \right\} W(\alpha_1, \alpha_1^*, \alpha_2, \alpha_2^*) \quad (5.6) \end{aligned}$$

## 5.2 A Função de Wigner para o OPO Não-Degenerado

Trata-se, então, do momento em que a equação (5.6) será resolvida, objetivando obter uma função de Wigner estacionária para o sistema de interesse.

Realizando uma mudança de variáveis (que correspondem às quadraturas dos modos),

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_1^* & y_1 &= -i(\alpha_1 - \alpha_1^*) \quad , \\ x_2 &= \alpha_2 + \alpha_2^* & y_2 &= -i(\alpha_2 - \alpha_2^*) \quad , \end{aligned} \quad (5.7)$$

e calculando o Jacobiano,

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_1^*, \alpha_2, \alpha_2^*)} \right| = 4 \quad , \quad (5.8)$$

a equação (5.6) pode ser resolvida em termos das quadraturas. É necessário, apenas, verificar que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (5.9)$$

e conseqüentemente,

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_j^*} = \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right\} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) \quad . \quad (5.10)$$

Chega-se, então, em uma equação de Fokker-Planck nas variáveis de quadraturas dos modos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} W(x_j, y_j) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \gamma_1 x_1 - \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} x_2 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} x_1 (x_2^2 + y_2^2) \right] \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \gamma_2 x_2 - \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} x_1 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} x_2 (x_1^2 + y_1^2) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ \gamma_1 y_1 + \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} y_2 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} y_1 (x_2^2 + y_2^2) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ \gamma_2 x_y + \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} y_1 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} y_2 (x_1^2 + y_1^2) \right] \\
&\left. + \gamma_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) + \gamma_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) \right\} W(x_j, y_j) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente no capítulo 3, resolver (5.11) em busca de uma função que dê a sua evolução temporal pode ser uma tarefa muito árdua. É possível, porém, buscar uma distribuição de probabilidade de seu regime estacionário. Fazendo

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x_j, y_j) = 0 \quad , \quad (5.12)$$

utilizando (3.31), que compreende a equação  $Z_i = \sum_k D_{ik}^{(2)-1} (2D_k^{(1)} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} D_{kj}^{(2)})$ , a matriz  $D^{(1)}$  pode ser identificada como sendo

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_1 x_1 - \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} x_2 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} x_1 (x_2^2 + y_2^2) \\ \gamma_1 y_1 + \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} y_2 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} y_1 (x_2^2 + y_2^2) \\ \gamma_2 x_2 - \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} x_1 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} x_2 (x_1^2 + y_1^2) \\ \gamma_2 x_y + \frac{\chi^\epsilon}{\gamma_0} y_1 + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} y_2 (x_1^2 + y_1^2) \end{pmatrix}$$

Para satisfazer a condição (3.34), é necessário que  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ . É possível, então, encontrar a solução estacionária da equação de Fokker-Planck, que será a função de Wigner para o sistema.

A solução estacionária da equação de Fokker-Planck, uma vez satisfeita a condição potencial, é dada por

$$W_S(\vec{x}) = N \exp \left\{ \int^x d\vec{x}' \cdot Z \right\} = \exp \{ -\phi(\vec{x}) \} \quad (5.13)$$

onde

$$\phi(\vec{x}) = - \int d\vec{x}' \cdot z = \int dx_1 Z_1 + \int dy_1 Z_2 + \int dx_2 Z_3 + \int dy_2 Z_4 \quad . \quad (5.14)$$

Essa é a chamada solução potencial da equação de Fokker-Planck devido à semelhança com a função de partição da mecânica estatística escrita em termos dos potenciais termodinâmicos, além de poder ser apontada como a divergência de uma certa função: equação (3.34).

Reconhece-se ainda de  $D^{(1)}$ ,

$$\begin{aligned}
\int dx_1 Z_1 &= \frac{2}{\gamma} \left[ \left( \gamma + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} (x_2^2 + y_2^2) \right) \frac{x_1^2}{2} - \frac{\chi\epsilon}{\gamma_0} x_1 x_2 \right] \\
\int dy_1 Z_2 &= \frac{2}{\gamma} \left[ \left( \gamma + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} (x_2^2 + y_2^2) \right) \frac{y_1^2}{2} + \frac{\chi\epsilon}{\gamma_0} y_1 y_2 \right] \\
\int dx_2 Z_3 &= \frac{2}{\gamma} \left[ \left( \gamma + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} (x_1^2 + y_1^2) \right) \frac{x_2^2}{2} - \frac{\chi\epsilon}{\gamma_0} x_1 x_2 \right] \\
\int dy_2 Z_4 &= \frac{2}{\gamma} \left[ \left( \gamma + \frac{\chi^2}{4\gamma_0} (x_1^2 + y_1^2) \right) \frac{y_2^2}{2} + \frac{\chi\epsilon}{\gamma_0} y_1 y_2 \right] .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Finalmente, obtem-se a função de Wigner estacionária para o estado de dois modos

$$\begin{aligned}
W(x_1, x_2, y_1, y_2) &= N \exp \left\{ - \left[ x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2 \frac{\chi\epsilon}{\gamma_0} (y_1 y_2 - x_1 x_2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\chi^2}{2\gamma\gamma_0} (x_1^2 + y_1^2) (x_2^2 + y_2^2) \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Essa equação descreve a “distribuição de probabilidade conjunta” de dois modos de mesma frequência mas polarizações ortogonais. Todas as propriedades estatísticas das medidas e correlações entre as quadraturas podem ser fornecidas por essa distribuição. Assim, (5.16) nos trás informações do estado de equilíbrio do sistema e, por meio dela, é possível calcular médias e funções de correlações de grandezas que podem ser medidas experimentalmente em laboratórios.

O termo  $\chi^2$ , responsável pela não-linearidade, faz com que a distribuição acima encontrada não possa ser fatorada, de sorte que  $W(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq W(x_1, y_1) W(x_2, y_2)$ . Uma pergunta interessante, ainda não demonstrada, é se o fato de  $W(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq W(x_1, y_1) W(x_2, y_2)$  confere um caráter de um estado emaranhado de acordo com a seção 3.2.2.

As variáveis  $x_1$  e  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$  são canonicamente conjugadas, e levam o nome de variáveis de quadraturas. Cada par pode ser entendido como carregando informação sobre a amplitude e a fase, sempre respeitando o princípio da incerteza de Heisenberg, ou seja,  $\Delta x_i \Delta y_i > 1$ .

O fator  $\epsilon$  representa o bombeamento do sistema, enquanto o  $\chi$  está associado com o termo de acoplamento não-linear. Os fatores  $\gamma_0$  e  $\gamma$  estão ligados à dissipação:  $\gamma_0$  ao modo 0 e  $\gamma$  aos modos 1 e 2.

### 5.3 Marginal da Função de Wigner

A partir da distribuição para os dois modos amplificadas (5.16), a marginal da função de Wigner é determinada pela distribuição de quadraturas para um dos modos quando uma integração nas variáveis do outro modo é realizada.

$$W(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 W(x_1, y_1, x_2, y_2) \quad , \quad (5.17)$$

cujos resultados são

$$W(x_2, y_2) = \frac{\pi}{1 + g^2 (x_2^2 + y_2^2)} \exp\left(\frac{-(x_2^2 + y_2^2)(1 - \mu^2 + g^2(x_2^2 + y_2^2))}{1 + g^2(x_2^2 + y_2^2)}\right) \quad , \quad (5.18)$$

onde

$$\mu \equiv \frac{\chi\epsilon}{\gamma\gamma_0} \quad , \quad (5.19)$$

representa uma grandeza adimensional para a intensidade do bombeamento e

$$g^2 \equiv \frac{\chi^2}{2\gamma\gamma_0} \quad . \quad (5.20)$$

Essa distribuição nos fornece a estatística das quadraturas de um dos feixes quando visto de forma isolada. Ela descreve uma distribuição cujas variâncias em  $x_2$  e  $y_2$  são mais largas do que as do estado de vácuo. Ou seja, menos coerente do que o estado coerente, semelhante ao estado térmico, quando vistas de formas isoladas. No entanto, o par emaranhado apresenta correlações fortes inclusive compressão de ruídos em algumas combinações de quadratura.

Nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3 apresentamos o perfil dessa distribuição em três regimes de operação do OPO: abaixo, no e acima do limiar, quando  $g^2 = 0.01$  (esse valor foi escolhido para satisfazer a condição de ser muito menor que 1). Percebe-se que acima do limiar a média nas quadraturas dos campos deixam de ser zero e por isso temos uma distribuição onde o valor mais provável não se encontra mais em torno da origem, mas ainda temos uma simetria radial que mostra a indeterminação da fase.

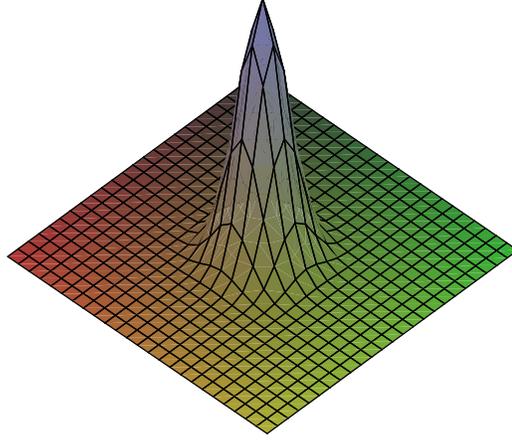


Figura 5.1: Gráfico da marginal abaixo do limiar ( $\mu = 0.8$ ).

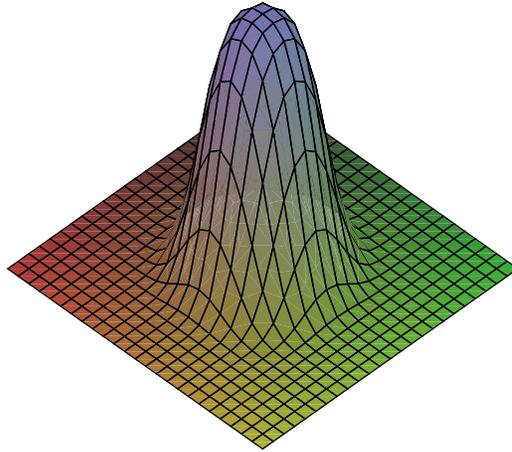


Figura 5.2: Gráfico da marginal da função de Wigner no limiar ( $\mu = 1.0$ ).

## 5.4 Análise Abaixo do Limiar

Analisando novamente a equação (5.16) verificamos que o termo  $\frac{\chi^2}{2\gamma\gamma_0} (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$  é o responsável pela parte não linear da distribuição de probabilidade. Em uma primeira aproximação, quando estivermos abaixo do limiar, podemos desprezar este termo pois uma vez que  $\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2 \rangle = 0$  assim também serão  $\langle x_i \rangle$ ,  $\langle y_i \rangle$ ,  $\langle x_i \rangle^2$  e  $\langle y_i \rangle^2$  iguais a 0, e  $\chi^2$  ser muito menor que  $\chi$ . Dessa maneira obtemos resultados já conhecidos e descritos na literatura [19].

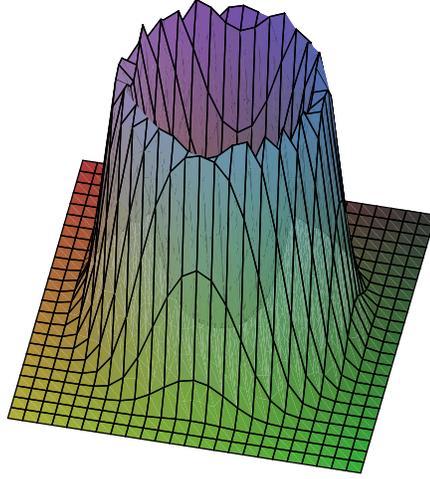


Figura 5.3: Gráfico da marginal da função de Wigner acima do limiar ( $\mu = 1.1$ ).

Nessa aproximação, a distribuição se torna uma *gaussiana*, e portanto, trazendo muitas facilidades quando realizarmos alguns cálculos de médias e correlações. Trabalhando nesse primeiro momento com a distribuição linearizada,

$$W(x_1, x_2, y_1, y_2) = N \exp \left\{ - \left[ x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2 \frac{\chi \epsilon}{\gamma \gamma_0} (y_1 y_2 - x_1 x_2) \right] \right\} \quad (5.21)$$

podemos encontrar primeiramente a constante de normalização, por meio de um integração quádrupla

$$N = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 W(x_1, x_2, y_1, y_2) \right)^{-1} \quad (5.22)$$

cujo resultado é:

$$N = \frac{1 - \mu^2}{\pi} \quad (5.23)$$

Calcular correlações, nesse caso, não é um trabalho muito árduo, lembrando que

$$\langle f(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 f(x_1, x_2, y_1, y_2) W(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad , \quad (5.24)$$

podemos calcular correlações relacionadas com as quadraturas combinadas entre os dois modos, por exemplo,

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle (y_1 + y_2)^2 \rangle = \frac{1}{1 + \mu} \quad (5.25)$$

$$\langle (x_1 + x_2)^2 \rangle = \langle (y_1 - y_2)^2 \rangle = \frac{1}{1 - \mu} \quad (5.26)$$

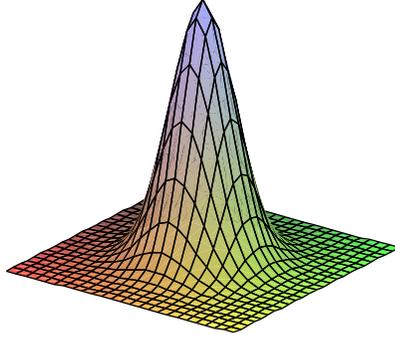


Figura 5.4: Curva de nível para a função linearizada (equação 5.21) quando  $\mu = 0$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Representação do estado de vácuo. Nesse caso, o bombeamento ( $\epsilon$ ) tem valor zero.

A escolha dessas combinações de quadraturas está associada ao fato delas representarem variáveis do tipo EPR, que será discutido em detalhes mais a frente.

Verificamos que, enquanto as correlações da equação (5.25) sofrem uma compressão (*squeezing*) nas flutuações do ruído, as correlações da equação (5.26) exibem um aumento (*anti-squeezing*) dessas flutuações. No caso em que  $\mu = 1$  há a transição de fase onde o excesso de flutuações nas quadraturas combinadas que anti-comprimem tendem ao infinito. Na transição de fase as flutuações dessas combinações de quadraturas tendem a divergir nessa aproximação linearizada. Cálculos mais precisos dessas flutuações serão tratados na seção seguinte.

Repare também que, neste caso, não podemos ter  $\mu > 1$ , pois o termo  $+2\mu x_1 x_2$  seria dominante sobre os termos  $-x_1^2 - x_2^2$  e toda a integral divergiria.

Nesse momento, iremos analisar algumas curvas de níveis para a distribuição de probabilidade linearizada e faremos então uma comparação com gráficos obtidos por Vyas e Singh [21], onde os autores obtiveram a distribuição P-positiva para o mesmo sistema que estamos estudando. Mostraram, ainda, gráficos de probabilidades condicionais para o OPO, que será fonte de comparação para o nosso estudo.

Utilizando  $y_1$  e  $y_2$  iguais a 0 na equação (5.21) e  $\mu = 0, 0.5, 1.0$  e  $\mu > 1$ , encontramos os seguintes gráficos de probabilidade condicional:

Na figura 5.4, identificamos uma representação de um estado de vácuo ( $\mu = 0$ ), descrito por

uma gaussiana centrada na origem.

Quando “ligamos” o bombeamento, começamos a ter um estado comprimido, como mostrado na figura 5.5

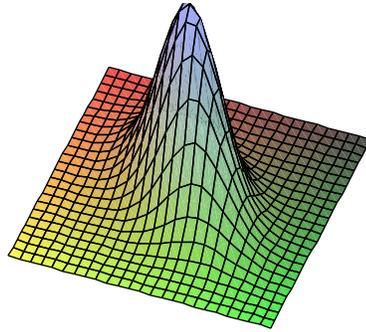


Figura 5.5: Curva de nível para a função linearizada (equação 5.21) quando  $\mu = 0.5$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Abaixo do limiar, começamos a perceber a compressão do estado numa quadratura quando o bombeio é ligado, enquanto há a anticompressão do estado na outra quadratura. O Princípio da Incerteza de Heisenberg é assegurado.

Quando chegamos no limiar ( $\mu = 1.0$ ), figura 5.6, verificamos uma divergência para  $x_1 = x_2$ . Nesses pontos, o argumento da exponencial se anula e uma integração sobre todo o espaço em uma função constante resulta num valor infinito.

Acima do limiar, a divergência é total, figura 5.7. A parte positiva do argumento excede a parte negativa, mostrando que nesse regime não se pode usar a função linearizada para descrever o sistema.

## 5.5 Análise em Torno e Acima do Limiar

A função de quase-probabilidade de dois modos para o OPO já foi reportada por Vyas e Singh [21]. Esses autores obtiveram a seguinte distribuição estacionária para a função P-positiva.

$$P(u) = e^{(-\phi(u))} \quad (5.27)$$

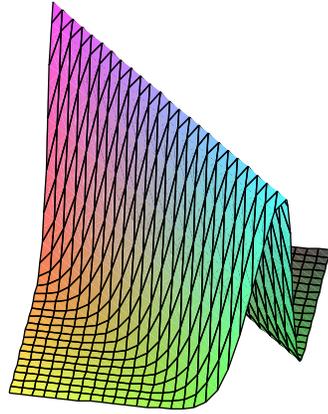


Figura 5.6: Curva de nível para a função linearizada (equação 5.21) quando  $\mu = 1.0$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . No limiar percebemos que há uma divergência. Isso ocorre devido a aproximação realizada na equação (5.16), onde o termo de correção foi desprezado.

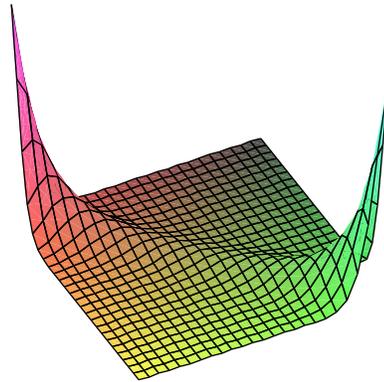


Figura 5.7: Curva de nível para a função linearizada (equação 5.21) quando  $\mu = 1.1$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Acima do limiar a divergência é total pelo mesmo motivo acima. O termo de correção tem um papel fundamental na descrição do fenômeno: sem ele, a função de Wigner linearizada não consegue representar a realidade encontrada nos laboratórios)

onde

$$\phi(u) = \lambda (u_2^2 + u_4^2) - a (u_1^2 + u_3^2) + \frac{1}{2} [(u_1^2 + u_3^2 + u_2^2 + u_4^2 + 4 (u_1^2 + u_3^2) (u_2^2 + u_4^2))] \quad (5.28)$$

onde,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  representam pseudoquadraturas:

$$\begin{aligned}
 u_1 &\propto x_1 + x_3 \\
 u_2 &\propto x_1 - x_3 \\
 u_3 &\propto x_2 + x_4 \\
 u_4 &\propto x_2 - x_4
 \end{aligned}
 \tag{5.29}$$

Neste trabalho, para encontrarem os gráficos de probabilidade condicional, fizeram  $u_3 = u_4 = 0$ , representados nas figuras 5.8, 5.9 e 5.10. Esse resultado será comparado ao aqui obtido usando a representação de Wigner.

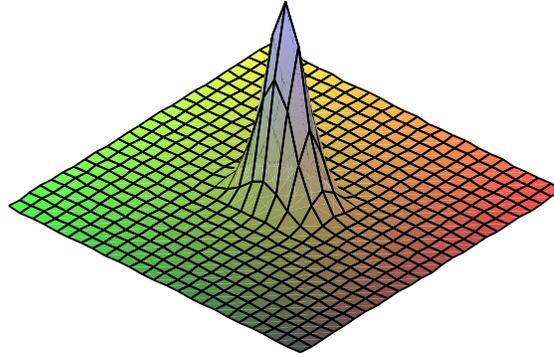


Figura 5.8: Gráfico relatado em [21] quando o valor do bombeio se encontra abaixo do limar. Podemos observar a semelhança entre ele e a figura 5.5

Uma vez que a função linearizada (5.21) não foi capaz de trazer informações suficientes sobre o sistema, teremos que abordar a distribuição de probabilidades (5.16) de forma completa, sem apelarmos para a aproximação linear. Novamente, nesse primeiro momento, o interesse está voltado apenas para os gráficos que representam as curvas de probabilidade condicional para  $y_1 = y_2 = 0$ . Faremos  $\mu$  variar entre cinco valores diferentes: ( $\mu = 0$ , figura 5.4), ( $\mu = 0.5$ , figura 5.11), ( $\mu = 1.0$ , figura 5.12), ( $\mu = 1.5$ , figura 5.13), ( $\mu = 2.0$ , figura 5.14), enquanto que o valor para  $\frac{\chi^2}{\gamma\gamma_0}$  será fixado em 0.01, obedecendo, assim, o pré-requisito que  $\frac{\chi^2}{\gamma\gamma_0} \ll 1$ . Verificamos que (5.16) resultou em gráficos que estão de acordo com aqueles apresentados em [21].

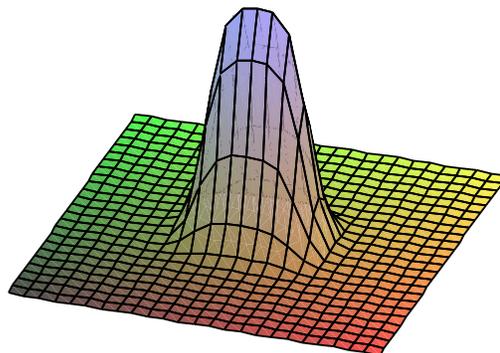


Figura 5.9: Gráfico reportado em [21] quando o valor do bombeio se encontra no limiar. Verifica-se que não há semelhança entre ele e a figura 5.6

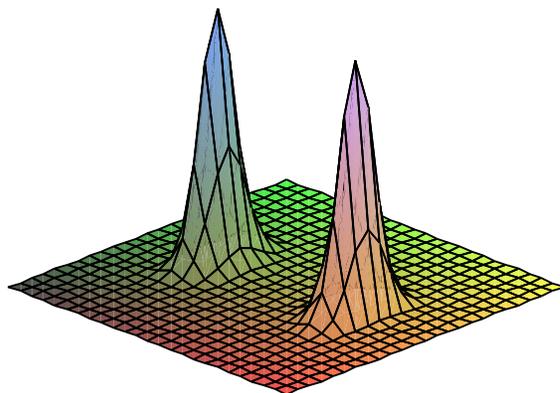


Figura 5.10: Gráfico descrito em [21] quando o valor do bombeio se encontra acima do limiar. Podemos notar que não há semelhança entre ele e a figura 5.7

A figura 5.11 não evidencia novidades, quando comparadas com a aproximação linear, diferente da figura 5.12, revelando o estado exatamente no limiar, o que a aproximação linear não foi capaz de conceber. Esse gráfico se assemelha ao gráfico da figura 5.9 e apresentado em [21], mostrando o *squeezing* em uma quadratura, e o *anti-squeezing* na outra.

A figura 5.13 está relacionada com um estado que se encontra acima do limiar, demonstrando

como a probabilidade condicional evoluiu acima do ponto crítico. Devido à solução obtida para a função de Wigner ser estacionária, não fomos capazes de saber se a região mais baixa da figura configura algum tipo de interferência, significando uma assinatura quântica de um estado macroscópico. Devido a presença do reservatório, se existisse qualquer tipo de interferência ela teria sido extinguida em face da decoerência.

A figura 5.14 é compatível com figura 5.10 descrita em [21], devido a grande semelhança entre elas. Observamos que tanto a distribuição de Wigner, apesar do truncamento da derivada de terceira ordem, quanto a distribuição P-positva, trazem a mesma física para o mesmo sistema.

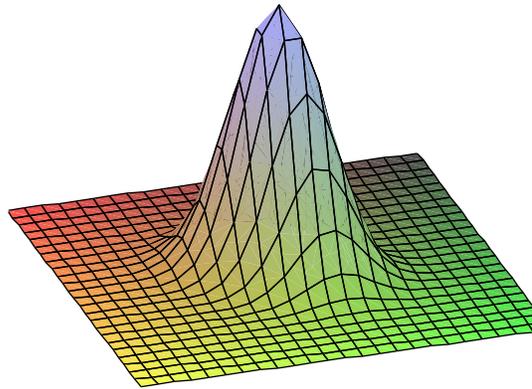


Figura 5.11: Gráfico das curvas de nível da função de Wigner completa (equação 5.16) para  $\mu = 0.5$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Abaixo do limiar, essa figura é similar com a figura 5.5 e 5.8, demonstrando um estado levemente comprimido numa quadratura.

O próximo passo é calcular as correlações das quadraturas. Com a ajuda do *software* matemático *maple* calculamos algumas correlações do sistema. Nesse caso, uma vez que o cálculo analítico ainda é problemático, fomos obrigados a recorrer a integração numérica. Determinamos, então, as correlações para os vários valores que o bombeamento pode assumir.

Utilizando (5.24) e integração numérica, calculamos  $\langle (x_1 \pm x_2)^2 \rangle$  e  $\langle (y_1 \pm y_2)^2 \rangle$ , cujas flutuações são críticas tendendo a divergir. Estamos interessados em verificar como se comportou a quadratura que sofre o *anti-squeezing*. Para termos uma primeira idéia, calculamos três valores para  $\langle (x_1 + x_2)^2 \rangle$  e  $\langle (y_1 - y_2)^2 \rangle$ . Um abaixo, outro no limiar e o terceiro acima do limiar. Utilizamos também as equações diferenciais estocásticas de Itô (5.4) para uma simulação numérica com o intuito de mantermos controle sobre o resultado da integração numérica. O resultado apurado encontra-se na figura 5.15

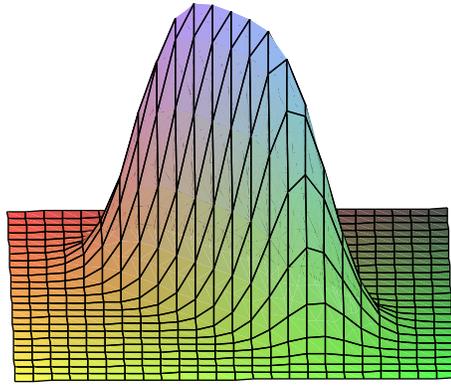


Figura 5.12: Gráfico das curva de nível da função de Wigner completa (equação 5.16) para  $\mu = 1.0$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Com o termo de correção não-linear presente na expressão, não há mais o aparecimento da divergência mesmo no limiar. O gráfico obtido está de acordo com o relatado em [21] e assemelha-se com a figura 5.9

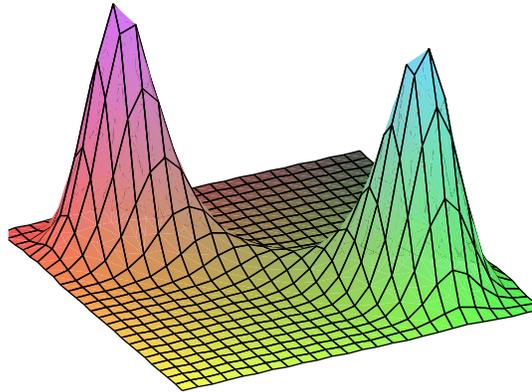


Figura 5.13: Gráfico das curva de nível da função de Wigner completa (equação 5.16) para  $\mu = 1.5$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Com o termo de correção não-linear presente na expressão, não há mais o aparecimento da divergência mesmo acima do limiar. Notamos o momento de separação entre os dois picos identificados na figura 5.10.

Cabe lembrar, que as flutuações que um feixe sofre correlaciona-se com as flutuações sofridas pelo outro feixe, sugerindo um estado emaranhado, discutido com mais detalhe na próxima seção.

Vale frisar, que a distribuição de Wigner (5.16) é capaz de fazer previsões para o OPO nos três regimes de operação, conseguindo corrigir uma teoria linearizada que se aplica muito bem abaixo do limiar.

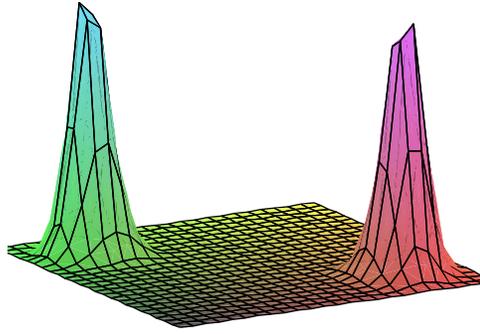


Figura 5.14: Gráfico das curva de nível da função de Wigner completa (equação 5.16) para  $\mu = 2.0$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ . Com o termo de correção não-linear presente na expressão, não há mais o aparecimento da divergência mesmo acima do limiar. Observamos a semelhança com a figura 5.10, notando-se, os dois picos de forma bem distinta compatível com [21].

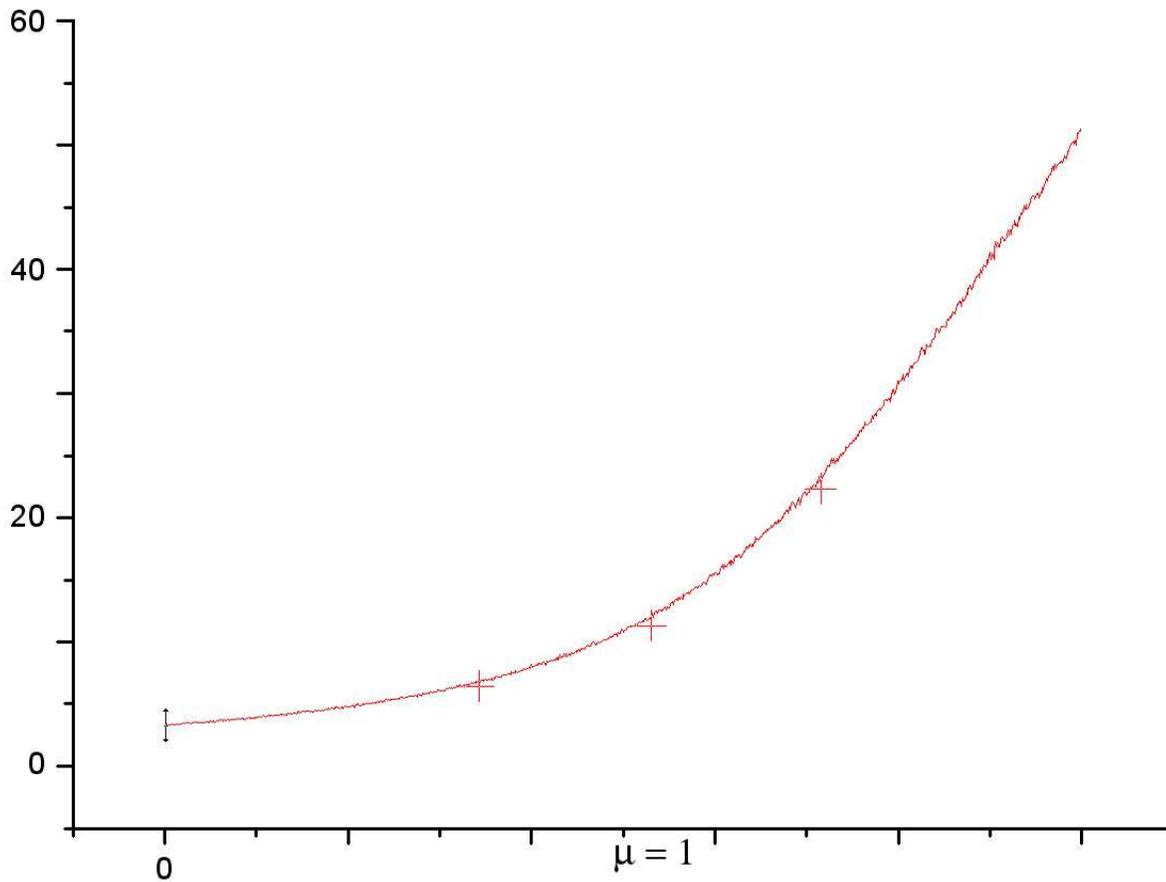


Figura 5.15: Gráfico revelando como o valor esperado de  $\langle (x_1 + x_2)^2 \rangle$  e  $\langle (y_1 - y_2)^2 \rangle$  variam com a intensidade do bombeamento.

## 5.6 Critério de Emaranhamento Baseado na Observação de Dois Modos Comprimidos

Emaranhamento quântico é um fenômeno no qual o estado de dois ou mais objetos encontram-se conectados de forma que um objeto não pode mais ser descrito adequadamente se os outros objetos forem desconsiderados, mesmo que eles estejam espacialmente separados. Essa conexão resulta em correlações entre propriedades físicas dos observáveis .

Nesse momento, estamos interessados em saber como os estados emaranhados podem ser identificados a partir de um conjunto de critérios chamados critério de Duan [22], que foi baseado na prova de um teorema que trata da separabilidade de um estado quântico  $\hat{\rho}$ .

Em seu artigo, Duan baseou-se no cálculo da variância total de um par de operadores do tipo EPR (operadores que não comutam entre sí, mas combinações de soma e subtração entre eles podem comutar), onde, para qualquer estado de variáveis contínuas separáveis, a variância total é delimitada por um valor mínimo resultante das relações de incerteza, enquanto que para um estado emaranhado esse limite pode ser excedido. Assim, a violação desse limite nos dá uma condição suficiente para a inseparabilidade de um estado.

Para tanto, ele supôs duas variáveis definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2 \\ \hat{v} &= |a|\hat{p}_1 + \frac{1}{a}\hat{p}_2\end{aligned}\tag{5.30}$$

onde  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \delta_{ij}$ . Ele calculou  $\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle$  e conseguiu mostrar que para um estado ser separável basta que

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle \geq a^2 + \frac{1}{a^2} \quad .\tag{5.31}$$

No nosso sistema temos um par de observáveis do tipo EPR. Verificamos que para cada modo,  $[\hat{x}, \hat{y}] \neq 0$ , porém,  $[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 + \hat{y}_2] = 0$ , o que configura variáveis EPR [23, 24]. Temos, ainda, o mesmo tipo de variáveis como (5.30), porém com  $a = 1$ .

Se forem conhecidas as duas variâncias das duas quadraturas comprimidas,  $\Delta\hat{X}$  e  $\Delta\hat{Y}$ , temos pelo critério de Duan (5.31) que se  $\Delta\hat{X} + \Delta\hat{Y} < 2$ , então o emaranhamento do estado é garantido.

Se fizermos  $\chi = 0$ , estamos “desligando” toda a interação de nosso sistema. Assim, ao olharmos para a equação (5.16) nessa condição, estaremos olhando para o estado de vácuo.

Calculando os valores esperados  $\langle(x_1 - x_2)^2\rangle$  e  $\langle(y_1 + y_2)^2\rangle$  na condição acima, encontramos o resultado esperado para um estado de vácuo.

$$\langle(x_1 - x_2)^2\rangle = \langle(y_1 + y_2)^2\rangle = 1 \quad (5.32)$$

Quando ligamos a interação ( $\chi \neq 0$ ) e estivermos operando no regime abaixo do limiar, obteremos nas quadraturas comprimidas valores de correlações abaixo de 1. Sendo assim, pelo critério de Duan, temos um estado misto emaranhado. Infelizmente, o critério de Duan se aplica somente a estados gaussianos e no regime acima do limiar, o termo não-linear descaracteriza a distribuição como sendo gaussiana. Assim, ficamos sem nenhum critério para analisarmos se acima do limiar o estado também será emaranhado. Mas vale lembrar que mesmo acima do limiar a condição (5.31) ainda é satisfeita.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O principal resultado obtido nesse estudo foi a distribuição de Wigner de dois modos amplificadas por conversão paramétrica descendente em um OPO, expressão (5.16). Esses modos estão correlacionados em suas quadraturas e, conseqüentemente, em amplitude e fase.

Essas correlações, quando testadas pelo critério de Duan, mostraram se tratar de um estado misto emaranhado quando abaixo do limiar. No regime acima do limiar, a distribuição não é mais da forma gaussiana e assim ficamos impossibilitados de conhecer realmente se o estado é emaranhado. O critério de Duan se aplica somente a estados gaussianos. Ainda assim, acreditamos que mesmo acima do limiar o estado continuará emaranhado.

Com essa distribuição, podemos calcular qualquer função de correlação entre as quadraturas dos modos e em qualquer regime de operação do OPO (abaixo, acima e no limiar), em que as flutuações críticas de certas combinações de quadraturas tenderiam a divergir numa teoria linear.

Apesar de outras distribuições de quase-probabilidade para o mesmo sistema tenham sido relatadas em outros trabalhos utilizando outras representações [21, 25, 26] e para o OPO degenerado tenha sido calculada em [27], a função de Wigner demonstrada no nosso trabalho é sem dúvida muito mais visível e clara no que diz respeito à forma como ocorrem as correlações, além de apresentar um apelo estético inquestionável.

Em [25], a representação P-generalizada [28] foi utilizada para investigar a estatística quântica dos campos estacionários intracavidade de um oscilador paramétrico. Ao calcularem as correlações de intensidade, os autores obtiveram uma integral que dependia de funções hipergeométricas degeneradas e o resultado da integração dependia ainda de um somatório infinito, acarretando em dificuldades matemáticas e na visualização da física envolvida no processo.

Em [26], os autores buscaram uma função de Wigner para o OPO não-degenerado por meio de um método indireto. Eles utilizaram a equação de Fokker-Planck correspondente a representação P-complexa para então escreverem a função de Wigner como função da P-complexa, demonstrando a função de Wigner em termos das funções de Bessel. Novamente, o resultado final dependeu de um somatório infinito. Ao procurarem a marginal da função de Wigner, o resultado foi uma função hipergeométrica, gerando o mesmo problema mencionado acima, isto é, a falta de clareza e a difícil manipulação da expressão.

Em [27], foi discutido cálculos dinâmicos para o OPO degenerado a partir da base dos estados coerentes e a base de Fock. Para a base de estados coerentes foi utilizada a representação P-positiva, considerada essencial para a obtenção de uma representação estocástica exata do problema não-linear. Esse método também permitiu simular o tunelamento entre os dois estados estáveis do OPO acima do limiar. A metodologia empregada para a base de estados coerentes permite resultados analíticos se forem considerados um grande número de fótons e resultados numéricos para qualquer quantidade no número de fótons, enquanto que os cálculos realizados na base de Fock são restritos a análise numérica e quando o número de fótons é pequeno. Os resultados são, então, comparados com os mesmos obtidos pela função de Wigner truncada.

Ainda na introdução de [27], os autores referiram-se a função de Wigner truncada como sendo equivalente à eletrodinâmica estocástica e não descreveria de forma realista processos quânticos não-lineares. Felizmente, obtivemos um resultado onde a função de Wigner encontrada descreveu muito bem processos quânticos não-lineares, contrariando [27].

Anos mais tarde, na conclusão de [19], Drummond relatou que perto do limiar a função de Wigner descreveu bem o OPO. Nessa dissertação, mais uma vez, demonstramos uma precisão enorme com a função de Wigner abaixo do limiar, quando calculamos as variâncias das quadraturas que sofrem o *anti-squeezing*.

Além da alta concordância entre as várias representações, outras aplicações para esse sistema podem ser previstas. A hipótese de criptografia quântica é sem dúvida uma possibilidade real. Utilizando-se os dois feixes emergentes do cristal (sinal e complementar), podemos usar um deles como sendo a chave criptográfica, enquanto que o outro carregará a informação. Medindo apenas um dos feixes, o ruído será muito elevado e nenhuma informação poderá ser obtida pois cada feixe possui, isoladamente, uma distribuição de flutuações (figura 5.2) maior que a

do estado de vácuo. Uma técnica para a obtenção da informação criptografada é a detecção em coincidência dos dois feixes emaranhados que saem do cristal e, assim, quando combinados de maneira adequada apresentarão *squeezing* em uma de suas quadraturas, permitindo que a informação escondida possa ser lida.

Como parte do projeto para as etapas futuras, pretendemos demonstrar, por meio de critérios aplicados à distribuições não-gaussianas, a existência de um estado emaranhado para os feixes no regime acima do limiar, comprovando assim nossas hipóteses. Em seguida, desejamos encontrar soluções multi-modos, que permitam fazer um mapa do ruído e identificar correlações espaciais.

Como comentário final, vale salientar que o objetivo central desse trabalho foi obter uma distribuição de probabilidades que pudesse ser utilizada em qualquer regime de operação do OPO. Além disso, que tivesse uma aparência simples, gerando intuição física sobre o sistema em questão, uma vez que até o momento, nenhuma distribuição analisada apresentou tamanha facilidade em sua visualização e em suas integrais, como a relatada nesse estudo.

# Apêndice A

## Tipos de ordenamento de operadores

Existe a possibilidade de se trabalhar com três tipos de ordenamento: normal, anti-normal e simétrico. Cada um deles organizará os operadores de criação  $\hat{a}^\dagger$  e os operadores de aniquilação  $\hat{a}$  de forma diferente. Por eles não comutarem,  $\hat{a}^\dagger\hat{a} \neq \hat{a}\hat{a}^\dagger$ , essa organização é indispensável.

**Ordenamento normal:** Os operadores de criação  $\hat{a}^\dagger$  são posicionados sempre a esquerda dos operadores de aniquilação  $\hat{a}$ . Esse ordenamento é representado por um par de dois pontos que são colocados antes e depois da função. Por exemplo:

$$:(\hat{a}^\dagger\hat{a})^l: = :(\hat{a}\hat{a}^\dagger)^l: = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^l = \hat{a}^{\dagger l}\hat{a}^l . \quad (\text{A.1})$$

**Ordenamento anti-normal:** Como o próprio nome sugere, é a forma inversa da anterior de arrumar os operadores. Agora, nenhum operador de aniquilação  $\hat{a}$  aparece depois do operador de criação  $\hat{a}^\dagger$ . Este ordenamento é representado por um par de três pontos verticais colocados antes e depois da função. Por exemplo:

$$:(\hat{a}^\dagger\hat{a})^l: = :(\hat{a}\hat{a}^\dagger)^l: = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^l = \hat{a}^l\hat{a}^{\dagger l} . \quad (\text{A.2})$$

**Ordenamento simétrico:** denotado por  $S(\ )$ , é a média de todos os possíveis ordenamentos de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Por exemplo:

$$S\left((\hat{a}^\dagger\hat{a})^2\right) = \frac{1}{6}\left(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^2\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2}\right) . \quad (\text{A.3})$$

# Apêndice B

## Cálculo de um termo típico da Equação de Fokker-Planck

Nesse apêndice foram feitos os cálculos para um termo da equação (4.20) usando a definição dada em (4.19), com o objetivo de demonstrar melhor as etapas para o cálculo de (4.22). Primeiramente, vamos recordar o teorema de Campbell-Baker-Hausdorff

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$$

$$\text{se } [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \quad (\text{B.1})$$

Obtivemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_W(Z, Z^*, t) = Tr\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} e^{iZ\hat{a}} e^{-|Z|^2/2}\right) = e^{-|Z|^2/2} Tr\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} e^{iZ\hat{a}}\right) . \quad (\text{B.2})$$

Duas relações importantes que iremos precisar são demonstradas a seguir:

$$[e^{iZ\hat{a}}, \hat{a}_j^\dagger] = iZ_j e^{iZ\hat{a}}$$

$$\Rightarrow e^{iZ\hat{a}}\hat{a}_j^\dagger = (iZ_j + \hat{a}^\dagger) e^{iZ\hat{a}} \quad (\text{B.3})$$

$$[\hat{a}_j, e^{iZ^*\hat{a}^\dagger}] = iZ_j^* e^{iZ^*\hat{a}^\dagger}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_j e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} = e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} (iZ_j^* + \hat{a}) , \quad (\text{B.4})$$

lembrando sempre que

$$[e^{iZ\hat{a}}, \hat{a}_j] = 0$$

$$\Rightarrow e^{iZ\hat{a}}\hat{a}_j = \hat{a}_j e^{iZ\hat{a}} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} [e^{iZ^*\hat{a}^\dagger}, \hat{a}_j^\dagger] &= 0 \\ \Rightarrow e^{iZ^*\hat{a}^\dagger}\hat{a}_j^\dagger &= \hat{a}_j^\dagger e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad . \quad (\text{B.7})$$

Da equação (4.20), utilizamos o termo  $i\hbar\chi \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 \hat{\rho} \right)$  para demonstrar a técnica de resolução do traço que encontramos na equação (4.19).

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_W = \chi e^{-|Z|^2/2} Tr\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 \hat{\rho} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} e^{iZ\hat{a}}\right) \quad (\text{B.8})$$

Uma propriedade importante do traço é que ele é cíclico. Ou seja,  $Tr(AB) = Tr(BA)$ ,  $Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$  etc. Assim, podemos reescrever (B.8) como

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_W = \chi e^{-|Z|^2/2} Tr\left(\hat{\rho} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0\right) \quad . \quad (\text{B.9})$$

Usando (B.3) ficamos com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_W = \chi e^{-|Z|^2/2} Tr\left(\hat{\rho} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \left(iZ_1 + \hat{a}_1^\dagger\right) e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0\right) \quad , \quad (\text{B.10})$$

que pode ser dividida em duas expressões

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_W = \chi e^{-|Z|^2/2} Tr\left(\hat{\rho} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} iZ_1 e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0\right) + \chi e^{-|Z|^2/2} Tr\left(\hat{\rho} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \hat{a}_1^\dagger e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0\right) \quad . \quad (\text{B.11})$$

Uma vez que  $Z_i$  é um escalar (podendo transitar livremente dentro do traço e até mesmo sair de dentro dele) e  $\hat{a}^\dagger$  comuta com  $e^{\hat{a}^\dagger}$  (ver (B.6)), ficamos com a seguinte expressão se fizermos uso de (B.3) novamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\chi_W &= \chi e^{-|Z|^2/2} \left\{ iZ_1 Tr\left(\hat{\rho} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \left(iZ_2 + \hat{a}_2^\dagger\right) e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_0\right) + \right. \\ &+ \left. Tr\left(\hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \left(iZ_2 + \hat{a}_2^\dagger\right) e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_0\right) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Repare que podemos fazer uso de um passo sutil, escrevendo por exemplo  $x e^{\alpha x}$  como  $\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha x}$

$$Tr\left(\hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \left(iZ_2 + \hat{a}_2^\dagger\right) e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_0\right) = Tr\left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial (iZ_1^*)} e^{iZ^*\hat{a}^\dagger} \left(iZ_2 + \hat{a}_2^\dagger\right) e^{iZ\hat{a}} \hat{a}_0\right) \quad . \quad (\text{B.13})$$

Assim, utilizando todas as propriedades vistas até agora, podemos reescrever (B.12) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \chi_W &= \chi e^{-|Z|^2/2} \left\{ (iZ_1) (iZ_2) \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}}) \right. \\
&+ (iZ_1) \frac{\partial^2}{\partial (iZ_2^*) \partial (iZ_0)} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}}) + \\
&+ (iZ_2) \frac{\partial^2}{\partial (iZ_0) \partial (iZ_1^*)} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}}) \\
&\left. + \frac{\partial^3}{\partial (iZ_0) \partial (iZ_1^*) \partial (iZ_2^*)} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}}) \right\} \\
\frac{\partial}{\partial t} \chi_W &= \chi e^{-|Z|^2/2} \left\{ (iZ_1) (iZ_2) \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} + (iZ_1) \frac{\partial^2}{\partial (iZ_2^*) \partial (iZ_0)} + \right. \\
&\left. + (iZ_2) \frac{\partial^2}{\partial (iZ_0) \partial (iZ_1^*)} + \frac{\partial^3}{\partial (iZ_0) \partial (iZ_1^*) \partial (iZ_2^*)} \right\} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}}) \quad . \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

O problema a ser resolvido foi conseguir colocar o termo  $\chi e^{-|Z|^2/2}$  que se encontra fora do traço de volta dentro dele para escrevermos essa derivada em termos da função característica  $\chi_W(Z, Z^*, t)$  que aparece em (4.19). Para isso, calculamos a seguinte quantidade:

$$\left( \frac{\partial}{\partial (iZ)} + \frac{Z^*}{2i} \right) \chi_W$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial (iZ)} + \frac{Z^*}{2i} \right) \chi_W &= \left( \frac{\partial}{\partial (iZ)} + \frac{Z^*}{2i} \right) \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2}) \\
&= \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} \frac{\partial}{\partial (iZ)} [e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2}] \right) + \frac{Z^*}{2i} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2}) \\
&= \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} \frac{\partial}{\partial (iZ)} [e^{iZ \hat{a}}] e^{-ZZ^*/2} \right) + \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} \frac{\partial}{\partial (iZ)} [e^{-ZZ^*/2}] \right) + \\
&\quad + \frac{Z^*}{2i} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2}) \\
&= \text{Tr} \left( e^{-ZZ^*/2} \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} \frac{\partial}{\partial (iZ)} [e^{iZ \hat{a}}] \right) + \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} \left( \frac{-Z^*}{2i} \right) e^{-ZZ^*/2} \right) + \\
&\quad + \frac{Z^*}{2i} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2}) \\
&= e^{-|Z|^2/2} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} \frac{\partial}{\partial (iZ)} [e^{iZ \hat{a}}] \right) - \frac{Z^*}{2i} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Z^*}{2i} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2} \right) \\
& = e^{-|Z|^2/2} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} \frac{\partial}{\partial (iZ)} \left[ e^{iZ \hat{a}} \right] \right) = e^{-|Z|^2/2} \frac{\partial}{\partial (iZ)} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} \right)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Com isso, concluímos que:

$$e^{-|Z|^2/2} \frac{\partial}{\partial (iZ)} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial (iZ)} + \frac{Z^*}{2i} \right) \chi_W \quad , \tag{B.16}$$

e analogamente,

$$e^{-|Z|^2/2} \frac{\partial}{\partial (iZ^*)} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial (iZ^*)} + \frac{Z}{2i} \right) \chi_W \quad , \tag{B.17}$$

onde  $\chi_W = \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} e^{-|Z|^2/2} \right) = \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger + iZ \hat{a}} \right)$ .

Assim, por exemplo, o termo

$$e^{-|Z|^2/2} (iZ_1) \frac{\partial^2}{\partial (iZ_0) \partial (iZ_2^*)} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger} e^{iZ \hat{a}} \right)$$

se torna

$$(iZ_1) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} + \frac{Z_0^*}{2i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_2^*)} + \frac{Z_2}{2i} \right) \chi_W.$$

Reescrevendo (B.14) em termos da função característica,

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_W & = \chi \left( (iZ_1) (iZ_2) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} + \frac{Z_0^*}{2i} \right) + (iZ_1) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} + \frac{Z_0^*}{2i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_2^*)} + \frac{Z_2}{2i} \right) \right. \\
& + (iZ_2) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} + \frac{Z_0^*}{2i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_1^*)} + \frac{Z_1}{2i} \right) \\
& \left. + (iZ_2) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} + \frac{Z_0^*}{2i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_1^*)} + \frac{Z_1}{2i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_2^*)} + \frac{Z_2}{2i} \right) \right) \chi_W
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Empregando a definição da função de Wigner e sua função característica, equação (3.3), notamos que uma é a transformada de Fourier da outra. Sendo assim, podemos escrever,

$$\chi_W(Z, Z^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \alpha W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ \alpha} \quad . \tag{B.19}$$

Assim,

$$\dot{\chi}_W(Z, Z^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \alpha \frac{\partial W(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ \alpha} \quad . \tag{B.20}$$

Porém,  $\dot{\chi}(Z, Z^*) = Tr\left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger + iZ \hat{a}}\right)$ , nos remeteu a equação (B.8) e gerou termos de uma equação diferencial, como o obtido em (B.18).

Chegamos então numa igualdade:

$$\frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha \frac{\partial W(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} = F(Z, Z^*) \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \quad (\text{B.21})$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha \frac{\partial W(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) F(Z, Z^*) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \quad (\text{B.22})$$

Mostrando o cálculo para um termo típico, por exemplo, o primeiro termo sem a parte da soma em  $Z_0^*$  da equação (B.18), encontramos:

$$\int d^2\alpha \frac{\partial W}{\partial t} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) \left[ (iZ_1) (iZ_2) \left( \frac{\partial}{\partial (iZ_0)} \right) \right] e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \quad (\text{B.23})$$

Observamos que

$$\frac{\partial}{\partial (iZ_0)} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} = \alpha_0 e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \quad (\text{B.24})$$

e que os termos  $(iZ_1) (iZ_2) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha}$  podem ser reescritos como  $\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha}$ . Identificamos então, uma técnica para transformarmos o que era função de  $Z$  e  $Z^*$  em função de  $\alpha$  e  $\alpha^*$ .

Representativamente, teremos

$$\int d^2\alpha \frac{\partial W}{\partial t} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) \left[ \alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \quad (\text{B.25})$$

Integrando por partes conseguimos fazer a derivada parar de atuar nas exponenciais e passar a atuar na função  $W(\alpha, \alpha^*, t)$ , permitindo assim montarmos uma equação diferencial como encontrada em (4.22).

# Apêndice C

## Lista de Figuras

# Referências Bibliográficas

- [1] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [2] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [3] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [4] J. J. Sakurai, “Modern Quantum Mechanics”, Revised Edition (Addison-Wesley Publishing Company, 1994)
- [5] Wolfgang. P. Schleich “Quantum Optics in Phase Space”, (WILEY-VCH. Berlin 2001).
- [6] Howard Carmichael “An Open Systems Approach to Quantum Optics”, (Springer-Verlag)
- [7] H. Weyl “The Theory of Groups and Quantum Mechanics”, (Dover: New York, 1950)
- [8] H. Risken, “The Fokker-Planck Equation”, 2nd edition (Springer-Verlag, 1989).
- [9] Vicente Pereira Barros, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 549 (2007).
- [10] J. Jing, J. Zhang, Y. Yan, F. Zhao, C. Xie, and K. Peng, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 167903 (2003).
- [11] S. Koike, H. Takahashi, H. Yonezawa, N. Takei, S. L. Braunstein, T. Aoki, and A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060504 (2006).
- [12] N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220502 (2005).

- [13] S. Koike, H. Takahashi, H. Yonezawa, N. Takei, S. L. Braunstein, T. Aoki, and A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060504 (2006).
- [14] Robert W. Boyd, “Nonlinear Optics”, 2nd edition (Academic Press).
- [15] P.A. Franken, A. E. Hill, C.W. Peters e G. Weinreich, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118 (1961).
- [16] P. D. Drummond, K. J. McNeil, D. F. Walls *Optica Acta* **27** 321 (1980)
- [17] P. D. Drummond, K. J. McNeil, D. F. Walls *Optica Acta* **28** 211 (1981)
- [18] C.W. Gardiner P. Zoller “Quantum Noise”, 2nd edition (Springer, 1999).
- [19] K. Dechoum, P. D. Drummond, S. Chaturvedi, M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **70**, 1 (2004)
- [20] M. Martinelli, C. L. Garrido Alzar, P. H. Souto Ribeiro, P. Nussenzveig, *Brazilian Journal of Physics* **31**, 4 (2001)
- [21] Reeta Vyas, Surendra Singh, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 2208 (1995).
- [22] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000)
- [23] A. Einstein, B. Podolskky, N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935)
- [24] O. Cohen, *Phys. Rev. A* **56**, 5 (1997)
- [25] K. J. McNeil, C. W. Gardiner, *Physical Rev. A* **28**, 1560 (1983)
- [26] K. V. Kheruntsyan, K. G. Petrosyan *Phys. Rev. A* **62**, 015801 (2000)
- [27] P. D. Drummond, P. Kinsler, *Physical Rev. A* **40**, 4813 (1989)
- [28] P. D. Drummond, C. W. Gardiner, *J. Phys. A* **13**, 2353 (1980)