INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

A Validade do Teorema de Birkhoff em uma Teoria do Tipo Born-Infeld da Gravitação

Tiago de Oliveira Rosa

Niterói
Agosto, 2010

Dissertação de Mestrado

A Validade do Teorema de Birkhoff em uma Teoria do Tipo Born-Infeld da Gravitação

Tiago de Oliveira Rosa

Dissertação apresentada à Universidade Federal Fluminense como requisito parcial exigido pelo Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do Título de MESTRE em Física.

Orientadora: Maria Emília Xavier Guimarães

Niterói
Agosto, 2010

Dedicatória

Aos meus pais.

Agradecimentos

Aos meus meus pais por tudo que me ensinaram e por sempre me apoiarem em meu caminho sempre acreditando e me dando forças.

A todos meus amigos que de uma maneira ou outra sempre estão comigo.

A Berta Jaqueline Rosa minha namorada por estar ao meu lado por todo este tempo para o que der e vier.

A Maria Emília minha orientadora por todo apoio e ajuda neste trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

Epígrafe

”O primeiro dever da inteligência é desconfiar dela mesma.”

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho usamos uma teoria alternativa da gravitação que segue os moldes da teoria de Born-Infeld. Esta teoria é conhecida como teoria NDL e recebe este nome devido a seus autores (Novello-DiLorenci-Luciane) e tem por propriedade fundamental o fato de considerar que a interação gravidade-gravidade não ocorre da mesma forma que a interação matéria-gravidade.

Mostramos neste trabalho que o teorema de Birkhoff é válido para esta teoria.

Abstract

In this work we work with an alternative theory of gravity which is patterned after the Born-Infeld theory. This theory is known as the NDL (Novello-DiLorenci-Luciane) theory and has as a fundamental property the fact that it considers that the gravity-gravity interaction does not occur in the same way as that of the matter-gravity interaction.

We show here that the Birkhoff theorem is valid for this theory.

NOTA, E/OU ERRATA:

Entrou em vigor no início do ano de 2009 uma nova formulação da ortografia da Língua Portuguesa. Esta dissertação, no entanto, encontra-se ainda nos moldes antigos. A razão principal é que ambos, autor e orientadora, ainda trazem dúvidas quanto à correta aplicação das novas normas, bem como da verdadeira utilidade das mesmas. Assim sendo, na apreciação desta tese, pedimos aos leitores a compreensão e a leniência na estrutura léxica da monografia. E, como se tivéssemos o direito, uma tendência pela segunda.

Sumário

Introdução

Na busca de uma teoria que unifique as teorias da gravidade e quântica muitas são candidatas a essa façanha, tais como, a teoria de cordas, a teoria-M e a supergravidade [1]. Essas teorias prevêem que essa quantização da gravidade exige dimensões extras e que, quando reduzidas a quatro dimensões, devem ter a relatividade geral como limite assintótico. Como existem várias teorias que são compatíveis ao processo de redução dimensional resolvemos tratar aqui de umas delas, conhecida como teoria NDL, com o principal objetivo de testá-la.

A relatividade geral desenvolvida por Albert Einstein e publicada em 1915 é uma generalização da teoria da gravitação de Newton e é aceita e comprovada por muitos experimentos [2].

O príncipio da equivalência garante que todos os tipos de matéria interagem da mesma maneira com o campo gravitacional, isto possibilitou a Einstein tratar o fenômeno gravitacional como uma modificação da geometria do espaço-tempo. Para Einstein a interação da gravidade com ela mesma seria dada da mesma forma que ocorre com os campos de matéria.

Mesmo assim, foi esta hipótese que o levou ao resultado mais notável da relatividade geral. Isto é, o processo gravitacional nada mais é do que uma modificação da geometria do espaço-tempo.

Deve-se então deixar claro que quando se busca uma descrição coerente da natureza pode-se dizer que:

- Para o caso da interação matéria-gravidade o esquema de geometrização fornecido pela relatividade geral parece ser um bom procedimento.

- Para a descrição da interação gravidade-gravidade não se pode dizer o mesmo por falta de evidências observacionais (ondas gravitacionais).

Deste modo quando se trata em seguir o método tradicional científico de submeter a teoria a observação, pode-se dizer que a modificação universal da geometria proposta pela relatividade geral não passa de uma extrapolação não confirmada experimentalmente.

Assim devemos levar em conta duas alternativas contrárias com respeito a interação gravidade-gravidade, ou seja:

- A gravidade se acopla a ela mesma da mesma maneira que outras formas de energia.
- A gravidade se acopla a ela mesma de maneira diferente a que se acopla a outras formas de energia.

Para o primeiro caso a modificação universal da geometria torna-se o cenário natural. Esta hipótese inicialmente pareceu ser bem mais natural, mas só em 1950 se tornou menos questionável, pois descobriu-se um modo de tratar a gravidade em termos de uma teoria de campo [5].

Já para o segundo vamos utilizar um método alternativo para gerar uma teoria de campo da gravidade, conhecida como teoria NDL.

A teoria NDL é uma teoria alternativa da gravitação e recebe este nome devido aos seus autores: M. Novello, V. A. De Lorenci e Luciane R. Freitas [3]. A principal diferença entre a teoria NDL e a relatividade geral baseia-se no fato de que a universalidade da interação matéria-gravidade é aceita mas a interação gravidade-gravidade se dá de maneira distinta. Uma importante consequência desta teoria está em sua predição acerca da velocidade das ondas gravitacionais que é diferente da prevista pela relatividade geral.

O resultado em relação à propagação de ondas gravitacionais indica que elas se propagam numa geometria efetiva que não é a mesma geometria da matéria. Todas as formas de energia, exceto a gravitacional, medem a mesma modificação universal do espaço-tempo curvo.

Um exemplo simples tomado como modelo é o de uma teoria não linear para o campo de spin 1 proposta por Born [7]. A teoria NDL baseia-se nessa proposta mas para o caso de spin 2.

O nosso objetivo aqui é verificar um interessante resultado que foi obtido em relatividade geral e é conhecido como teorema de Birkhoff. O teorema de Birkhoff estabelece que toda solução de vácuo esfericamente simétrica das equações de Einstein é necessariamente estática. Este teorema está intimamente ligado à solução de Schwarzschild na teoria da relatividade geral. No artigo seminal [4], Novello et al. mostraram que não há solução de Schwarzschild nas teorias NDL. Então, é natural nos perguntarmos se o teorema de Birkhoff continua válido nesta teoria. Este é o principal objetivo deste trabalho.

Esta dissertação divide-se da seguinte forma.

No capítulo 1 vamos apresentar os principais pontos e idéias relacionadas à teoria NDL. No capítulo 2 resolvemos as equações da teoria NDL para uma métrica estática e com simetria esférica. No capítulo 3 verificamos a validade do teorema de Birkhoff nessa teoria. Ou seja, resolvemos as equações desta teoria para uma métrica não estática e com simetria esférica. E finalmente no capítulo 4 apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 1

Teoria NDL

O princípio da equivalência constitui o fundamento da relatividade geral e é o centro da idéia sobre espaço-tempo curvo. Contudo deve-se distinguir o princípio da equivalência fraco do princípio de equivalência forte. No princípio de equivalência fraco todos os campos de matéria interagem com a gravidade da mesma maneira, exceto o campo gravitacional. No princípio de equivalência forte todos os campos, inclusive o gravitacional, interagem com a gravidade da mesma maneira.

Não há evidência de que maneira a gravidade se acopla a ela mesma, portanto o princípio de equivalência forte não possui algo que sustente sua idéia. A teoria NDL é uma teoria de campo gravitacional em que o princípio de equivalência forte é violado.

1.1 Definições e notações

Exibiremos aqui algumas definições e notações utilizadas. A métrica auxiliar $\gamma_{\mu\nu}$ da geometria de Minkowski é escrita em um sistema de coordenadas arbitrário para assim preservar a covariância geral da teoria, e definiremos a derivada covariante correspondente por:

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha} \tag{1.1}$$

em que $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ é

$$\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\gamma_{\beta\mu,\nu} + \gamma_{\beta\nu,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\beta}). \tag{1.2}$$

em que $\gamma_{\mu\nu}$ é a métrica de fundo que definiremos mais adiante.

O tensor de curvatura associado é identicamente nulo, isto é,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(\gamma_{\epsilon\gamma}) = 0.$$

Definimos o tensor $F_{\alpha\mu\nu}$ de três índices como o tensor campo gravitacional e é descrito em termos da variável simétrica $\phi_{\mu\nu}$ (tratado como potencial) pela expressão

$$F_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\phi_{\nu[\alpha;\mu]} + F_{[\alpha}\gamma_{\mu]\nu}), \tag{1.3}$$

em que o símbolo [ ] é usado para indicar antissimetrização, ou seja

$$[A, B] \equiv AB - BA. \tag{1.4}$$

De maneira análoga o símbolo de simetrização ( ) é,

$$(A, B) \equiv AB + BA. \tag{1.5}$$

O traço F_{α} é:

$$
\begin{aligned}
F_\alpha &\equiv F_{\alpha\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu[\alpha;\mu]} + F_{[\alpha}\gamma_{\mu]\nu})\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu} - \phi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu})\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu}\gamma^{\mu\nu} - \phi_{\nu\mu;\alpha}\gamma^{\mu\nu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\gamma^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu}\gamma^{\mu\nu} - \phi;\alpha + 4F_\alpha - F_\mu\delta^\mu_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu}\gamma^{\mu\nu} - \phi_{;\alpha} + 4F_\alpha - F_\alpha) \\
&= \phi_{;\alpha} - \phi_{\nu\alpha;\mu}\gamma^{\mu\nu}. \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

A quantidade $F_{\alpha\mu\nu}$ é antissimétrica nos dois primeiros índices, ou seja,

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\alpha\nu} = 0 \qquad (1.7)$$

que realmente

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\alpha\nu} &= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu} - \phi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}) \\
&+ \frac{1}{2}(\phi_{\nu\mu;\alpha} - \phi_{\nu\alpha;\mu} + F_\mu\gamma_{\alpha\nu} - F_\alpha\gamma_{\mu\nu}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

E vale também a identidade cíclica

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} = 0, \qquad (1.8)$$

que de fato

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} &= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu} - \phi_{\nu\mu;\alpha} + F_{\alpha}\gamma_{\mu\nu} - F_{\mu}\gamma_{\alpha\nu}) \\
&+ \frac{1}{2}(\phi_{\alpha\mu;\nu} - \phi_{\alpha\nu;\mu} + F_{\mu}\gamma_{\nu\alpha} - F_{\nu}\gamma_{\mu\alpha}) \\
&+ \frac{1}{2}(\phi_{\mu\mu;\alpha} - \phi_{\mu\alpha;\nu} + F_{\nu}\gamma_{\alpha\mu} - F_{\alpha}\gamma_{\nu\mu}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

A quantidade k representa a constante de Einstein e é escrita em termos da constante de Newton G_N e da velocidade da luz c da seguinte forma:

$$k = \frac{8\pi G_N}{c^4} \tag{1.9}$$

1.2 Do acoplamento universal matéria-gravidade a geometrização de Einstein

Feynman buscou quantizar a gravidade encorajado pela analogia com a eletrodinâmica quântica que no limite clássico é governada pelas equações de campo de Maxwell.

Logo, Feynman tratou a teoria quântica da gravitação como "apenas outra teoria quântica de campos"que em seu limite clássico deveria ser governada pelas equações de Einstein.

Um aspecto importante da teoria quântica desejada é que o graviton (partícula sem massa e de spin 2) possui apenas dois estados de helicidade. Logo o campo gravitacional também deveria possuir apenas dois graus de liberdade. Porém o campo clássico correspondente a uma partícula de spin 2 que possui seis componentes dinâmicas para descrever os dois estados de helicidade. Por causa dessa incompatibilidade entre o número de estados e o número de componentes do campo é que a teoria quântica da gravitação e seu correspondente clássico, são altamente restringidos.

Para resolver esta incompatibilidade é necessário que a teoria incorpore uma redundância, tal que diferentes configurações do campo clássico descrevam o mesmo estado físico. Ou seja, a teoria deve ser uma teoria de calibre. Para um campo sem massa e de spin 2, o princípio de calibre pode ser dado pela covariância geral, que leva a teoria de Einstein.

Feynman constrói uma ação quadrática para o campo sem massa e de spin 2 que se acopla linearmente ao tensor momento-energia. Essa invariância de calibre resultante da equação linear de campo pode inferir sobre o auto-acoplamento não-linear do campo quando se exige a invariância de calibre das amplitudes de espalhamento. Utilizando um método baseado na condição de consistência, Feynman chega a equação de campo não-linear. Por causa da equação linear de campo possuir necessariamente uma invariância de calibre, modificações genéricas nessa equação não garantem nenhuma solução. Os novos termos na equação modificada devem respeitar a condição de consistência, que exige a não violação da invariância de calibre. Essa condição de consistência é suficiente para se obter a equação não linear do campo.

O resultado das correções não-lineares infere no auto-acoplamento da gravidade. Com as correções não-lineares incluídas a fonte do campo gravitacional é um tensor de energia-momento total que inclui a contribuição do próprio campo gravitacional. Em outras palavras o princípio de equivalência forte é satisfeito.

A equação de campo para um campo livre, sem massa e de spin 2 foi escrita por Fierz e Pauli em 1939 [11].

A primeira tentativa publicada a respeito do acoplamento não linear na teoria de Einstein apareceu em 1954 por Suraj N. Gupta [13]. Ele notou que a ação da teoria obedece uma condição de consistência não trivial que é satisfeita pela relatividade geral. O argumento de Gupta segue o seguinte raciocínio.

Para um campo livre, sem massa e de spin 2 a equação de Fierz é:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

em que

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \equiv \Box\phi_{\mu\nu} - \phi^{\alpha}_{\mu;\alpha\nu} - \phi^{\alpha}_{\nu;\alpha\mu} + \phi^{\alpha}_{\alpha;\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}(\Box\phi^{\alpha}_{\alpha} - \phi^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta}).. \tag{1.11}$$

A quantidade $G^{(L)}_{\mu\nu}$ possui o divergente nulo. Isto implica por compatibilidade que o divergente do tensor momento-energia da matéria $T_{\mu\nu}$ deve também ser nulo. Desde que o campo gravitacional contribua com sua própria energia para o balanço da lei de conservação, o tensor momento-energia não pode ser separadamente conservado.

É precisamente neste ponto que a hipótese que faz a interação gravidade-gravidade seguir o mesmo comportamento da interação matéria-gravidade atua como guia para a escolha da contribuição gravitacional como fonte de $G^{(L)}_{\mu\nu}$. Isto significa que deve-se adicionar ao tensor momento-energia da matéria um tensor momento-energia para o campo gravitacional correspondente.

A idéia é proceder passo a passo. Primeiro adiciona-se o tensor $\mathscr{T}^{(1)}_{\mu\nu}$ do lado direito da equação (1.11). Como consequência deve-se adicionar a Lagrangiana original um termo de ordem mais alta para que, após a variação, o termo $\mathscr{T}^{(1)}_{\mu\nu}$ apareça. Isto gera uma nova condição de compatibilidade que é resolvida adicionando-se novamente a equação (1.11) um termo de ordem mais alta $\mathscr{T}^{(2)}_{\mu\nu}$. Isto impõe mais uma vez que deve-se adicionar um outro termo de ordem maior a Lagrangiana. Este processo continua indefinidamente pois para cada termo adicionado devemos somar um termo de ordem mais alta a Lagrangiana.

Este procedimento gera uma séria infinita e a soma dessa séria pode ser descrita de forma equivalente a formulação geométrica da relatividade geral.

1.3 A teoria de Fierz revisada

Como a motivação para a teoria NDL (teoria não-linear), mostra-se aqui que a teoria linear de campo de spin 2 pode ser descrita utilizando os invariantes construídos a partir do campo gravitacional $F_{\alpha\mu\nu}$. Os únicos dois invariantes que podem ser construídos através do campo são

$$A \equiv F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu} \tag{1.12}$$

e

$$B \equiv F_\mu F^\mu. \tag{1.13}$$

A covariância geral requer que a Lagrangiana seja um funcional de A e B, ou seja

$$L = L(A, B). \tag{1.14}$$

A teoria linear para um campo de spin 2 é dada pela ação

$$S^L = \int d^4x \sqrt{-\gamma}(A - B), \tag{1.15}$$

em que γ é o determinante de $\gamma_{\mu\nu}$. Pode-se escrever a menos de uma divergência total que,

$$S^L = \int d^4x \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu} G^L_{\mu\nu} \tag{1.16}$$

ou

$$S^L = -\int d^4x \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu} F^\lambda_{(\mu\nu;\lambda)} = \int d^4x \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu;\lambda} F_{\lambda(\mu\nu)}, \tag{1.17}$$

uma manipulação dessa expressão mostra que

$$\phi^{\mu\nu;\lambda} F_{\lambda(\mu\nu)} = -2(A - B). \tag{1.18}$$

A manipulação utilizada revela que qualquer teoria que forneça a equação de Fierz linear no limite de campo fraco deve-se reduzir a combinação dos invariantes A e B.

Este é o caso da teoria NDL e nos motiva a examiná-la.

1.4 Teoria não linear de spin 1

Seja a ação dada por

$$S = \int d^4x\sqrt{-\gamma}L(F) \tag{1.19}$$

onde a Lagrangiana L depende não linearmente do invariante F construído do campo $F^{\mu\nu}$ por

$$F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{1.20}$$

A equação de movimento é dada por

$$\{L_F F^{\mu\nu}\}_{;\nu} = \frac{1}{4}J^{\mu} \tag{1.21}$$

onde L_F é a derivada funcional da Lagrangiana em relação ao invariante. A teoria de Maxwell decorre da equação acima quando $L_F = \frac{1}{4}$.

A análise aqui será limitada a uma teoria não linear da eletrodinâmica proposta por Born e desenvolvida por Infeld, cujo a Lagrangiana é

$$L = -\frac{1}{4}\{\sqrt{b^4 + 2b^2F} - b^2\} \tag{1.22}$$

em que a constante b é o valor máximo possível para o campo.

Vale ressaltar duas importantes propriedades dessa teoria:

- A teoria é não linear.

- A propagação das ondas eletromagnéticas podem ser descritas como se as propriedades métricas do espaço-tempo fossem alteradas pela presença do campo eletromagnético não linear.

Que serão exploradas na construção da teoria de campo não linear de spin 2.

A forma do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ é obtido através da Lagrangiana (1.22):

$$T_{\mu\nu} = -L\gamma_{\mu\nu} - 4L_F F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu}. \tag{1.23}$$

Esta quantidade possui basicamente todas as propriedades algébricas e simétricas que aparecem no caso linear de Maxwell. A propriedade para o caso não linear que interessa aqui é a interação do campo com correntes externas permaneça a mesma. Contraindo a equação de movimento (1.21) com $F_{\alpha\mu}$ obtém-se

$$\{L_F F_{\alpha\mu} F^{\mu\nu}\}_{;\nu} - L_F F_{\alpha\mu;\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\alpha\mu} J^{\mu}. \tag{1.24}$$

Usando o tensor $T_{\mu\nu}$, a expressão anterior pode ser escrita como

$$T^{\mu}_{\alpha;\mu} + L_F F_{,\alpha} + 4L_F F^{\mu\nu} F_{\alpha\mu;\nu} = -F_{\alpha\mu} J^{\mu}, \tag{1.25}$$

ou

$$T^{\mu}_{\alpha;\mu} = -F_{\alpha\mu} J^{\mu}. \tag{1.26}$$

Um resultado conhecido segue dessa expressão, o de que o balanço das forças pela troca de energia do campo e das correntes é independente da forma como o invariante F entra na Lagrangiana.

1.5 Uma classe de teoria não linear de campo de spin 2

Como discutido anteriormente, quando se passa de uma teoria linear da gravidade para um caso geral, o procedimento padrão é adicionar ao tensor momento-energia da matéria o correspondente tensor momento-energia do campo gravitacional. Foi visto que o primeiro termo não linear contém o tensor $\mathscr{T}^{(1)}_{\mu\nu}$, que é o tensor momento energia obtido da parte linear. Esse procedimento é baseado na hipótese implícita que trata a energia gravitacional do mesmo modo que qualquer outra forma de energia. Ou seja, o campo gravitacional gerado por uma energia gravitacional não se distingue dos campos gerados por qualquer outra forma de energia. Isso é uma extrapolação do princípio de equivalência, aplicada a energia gravitacional. É neste ponto que os autores da teoria NDL tomaram um caminho diferente daquele seguido por alguns autores. Em vez de adicionar sucessivamente termos do tensor momento-energia do campo gravitacional para cada ordem de não linearidade a fonte do campo, partiram da hipótese de que os termos que representam a interação gravidade-gravidade são construídos como funcionais dos invariantes A e B. A ação é dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} L(A, B). \tag{1.27}$$

A variação da ação produz

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} \Theta^{\lambda}_{\mu\nu;\lambda} \delta\phi^{\mu\nu} \tag{1.28}$$

obtendo a equação de movimento

$$\Theta^{\lambda}_{\mu\nu;\lambda} = 0 \tag{1.29}$$

onde

$$\Theta_{\lambda\mu\nu} = L_A F_{\lambda(\mu\nu)} - (L_A + L_B)(2F_\lambda \gamma_{\mu\nu} - F_\mu \gamma_{\nu\lambda} - F_\nu \gamma_{\mu\lambda}) \tag{1.30}$$

em que $L_A \equiv \delta L/\delta A$ e $L_B \equiv \delta L/\delta B$. A expressão se reduz ao caso linear de Fierz para $L_A = -\frac{1}{2}$ e $L_B = \frac{1}{2}$, ou seja

$$\Theta^{(L)}_{\lambda\mu\nu} = -F_{\lambda(\mu\nu)}. \tag{1.31}$$

Pode-se mostrar que

$$F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} = -G^{L}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.32}$$

em que $G^L_{\mu\nu}$ é o operador linear de Fierz (1.10).

Para garantir que no limite de campo fraco a equação de Fierz seja obtida deve-se considerar que as Lagrangianas que dependem dos invariantes obedecem a relação

$$L_B = -L_A \tag{1.33}$$

assim a equação de movimento para o campo gravitacional livre toma a forma

$$\{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda} = 0. \tag{1.34}$$

Usando as propriedades de $F^{\lambda}_{(\mu\nu)}$ pode-se reescrever esta expressão de forma mais conveniente

$$G^L_{\mu\nu} = L_A^{-1}\{L_{A;\lambda} F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}. \tag{1.35}$$

Esta é uma equação exata, ou seja, não sofreu nenhum tipo de aproximação. O operador linear de Fierz esta isolado do lado esquerdo da equação enquanto do lado direito esta todo o grupo de termos da não linearidade. A fonte da linearidade em contraste com o caso da relatividade geral não é expressa em termos do tensor momento-energia do campo gravitacional.

1.6 O tensor momento-energia do campo gravitacional

A definição geral do tensor momento-energia é dado pela variação da lagrangiana em relação a métrica fundamental

$$\mathscr{T}^{(g)}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta L \sqrt{-\gamma}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \tag{1.36}$$

considerando a relação (1.33), obtem-se o tensor momento-energia do campo gravitacional

$$\mathscr{T}^{(g)}_{\mu\nu} = -L\gamma_{\mu\nu} + 2L_A\{2F_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_{\nu} + F_{\alpha\beta\mu}F^{\alpha\beta}_{\nu} - F^{\alpha}F_{\alpha(\mu\nu)} - F_{\mu}F_{\nu}\}. \tag{1.37}$$

O tensor $\mathscr{T}^{(g)}_{\mu\nu}$ difere do tensor obtido pelo teorema de Noether por um divergente total

$$N_{\mu\nu} = -L\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\phi_{\alpha\beta;\nu}L_A F^{(\alpha\beta)}_{\mu}. \tag{1.38}$$

O balanço de energia entre o campo gravitacional e suas fontes possui uma expressão simples dada por:

$$N^{\mu}_{\nu;\mu} = T_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta}_{;\nu}. \tag{1.39}$$

Isso pode ser mostrado de maneira análoga ao descrito no caso de spin 1 ou por cálculo direto. Deve-se notar que assim como no caso de spin 1, o balanço de energia entre o campo gravitacional e suas fontes é independente da forma que a Lagrangiana assume para representar o campo gravitacional.

Na próxima seção considera-se um simples caso específico da teoria com a escolha de uma Lagrangiana para o esquema desenvolvido até aqui.

1.7 Um modelo sugestivo para gravitação

Desenvolveu-se nas seções anteriores um cenário geral para a construção de uma teoria gravitacional. Apresenta-se agora uma Lagrangiana que satisfaz os requerimentos anteriores e que através desta obtem-se uma caracterização das equações de movimento. Deve-se apresentar um exemplo de teoria de campos para o campo gravitacional que satisfaça as condições:

- Concorda com o que se desenvolveu nas seções anteriores.
- Concorda com os testes observados do campo gravitacional.

Tomando um modelo de teoria não-linear do campo eletromagnético proposta por Born e Infeld [7, 8, 9] assume-se para a interação gravidade-gravidade a Lagrangiana

$$L^g = \frac{1}{k}\{\sqrt{b^4 + b^2(-A+B)} - b^2\}. \tag{1.40}$$

A quantidade b tem dimensão de $(comprimento)^{-1}$ e devido a proposta da Lagrangiana (1.40) esta quantidade não possui o mesmo significado que em Born-Infeld. O máximo que pode-se fazer é especular.

1.8 Ondas gravitacionais

A principal proposta nesta seção é examinar o comportamento de ondas gravitacionai na teoria NDL. Analisa-se o comportamento das ondas gravitacionais com base na análise da evolução das descontinuidades da equação de movimento através de uma superfície característica Σ . Este é o aspecto principal para a distinção da teoria NDL e a relatividade geral. Primeiramente analisa-se o que ocorre no caso da teoria não linear de spin 1.

1.8.1 Caso não linear de spin 1

Seja Σ a superfície de uma descontinuidade, então

$$[F_{\mu\nu}]_{\Sigma} = 0 \tag{1.41}$$

e

$$[F_{\mu\nu,\lambda}]_{\Sigma} = f_{\mu\nu}\mathbf{k}_{\lambda} \tag{1.42}$$

em que $[J]_{\Sigma}$ representa a descontinuidade da função J através da superfície Σ.

Aplicando este a equação de movimento (1.21) obtem-se

$$L_F f^{\mu\nu}\mathbf{k}_{\nu} + 2L_{FF}\eta F^{\mu\nu}\mathbf{k}_{\nu} = 0 \tag{1.43}$$

onde η é

$$F^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} \equiv \eta.$$

Pode-se reescrever a equação (1.43) na forma

$$\left\{\gamma_{\mu\nu}\left(\frac{L_F^2}{L_{FF}} + L\right) + \mathscr{T}_{\mu\nu}\right\}\mathbf{k}^{\mu}\mathbf{k}^{\nu} = 0. \tag{1.44}$$

No caso de Born esta expressão se reduz a

$$\left\{\gamma_{\mu\nu} + \frac{4}{b^2}\mathscr{T}_{\mu\nu}\right\}\mathbf{k}^{\mu}\mathbf{k}^{\nu} = 0. \tag{1.45}$$

Portanto as perturbações se propagam numa geometria modificada, ou seja, não mais na geometria de fundo $\gamma_{\mu\nu}$, mas sim, numa geometria efetiva que depende da distribuição da energia no campo.

1.8.2 Caso não linear de spin 2

As condições de descontinuidade para um campo de spin 2 são

$$[F_{\mu\nu\alpha}]_\Sigma = 0 \tag{1.46}$$

e

$$[F_{\mu\nu\alpha;\lambda}]_\Sigma = f_{\mu\nu\alpha}\mathbf{k}_\lambda \tag{1.47}$$

aplicadas a equação de movimento do campo gravitacional obtem-se

$$f_{\mu(\alpha\beta)}\mathbf{k}^\mu = -2\frac{L_{AA}}{L_A}(\eta - \psi)F_{\mu(\alpha\beta)}\mathbf{k}^\mu = 0, \tag{1.48}$$

onde η e ψ são

$$\eta \equiv F_{\alpha\beta\mu}f^{\alpha\beta\mu},$$

$$\psi \equiv F_\mu f^\mu.$$

Utilizando a identidade cíclica pode-se escrever

$$f^\mu_{\alpha\beta}\mathbf{k}_\lambda + f^\mu_{\beta\lambda}\mathbf{k}_\alpha + f^\mu_{\lambda\alpha}\mathbf{k}_\beta = \frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha f_{[\lambda}\mathbf{k}_{\beta]} + \frac{1}{2}\delta^\mu_\beta f_{[\alpha}\mathbf{k}_{\lambda]} + \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda f_{[\beta}\mathbf{k}_{\alpha]},$$

multiplicando esta equação por $F^{\lambda\beta\mu}\mathbf{k}^\lambda$

$$(\eta - \psi)k^2 - 2F^{\alpha\beta\mu} f_{\lambda\beta\mu} \mathbf{k}^\lambda \mathbf{k}_\alpha + f_\mu \mathbf{k}^\mu F_\lambda \mathbf{k}^\lambda + F_{\alpha\beta\lambda} F^\alpha \mathbf{k}^\beta \mathbf{k}^\lambda = 0 \tag{1.49}$$

ou

$$\mathbf{k}^\mu \mathbf{k}^\nu [\gamma_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}] = 0, \tag{1.50}$$

em que a quantidade $\Lambda_{\mu\nu}$ é escrita em termos do campo gravitacional

$$\Lambda_{\mu\nu} \equiv 2\frac{L_{AA}}{L_A}[F_\mu^{\alpha\beta} F_{\nu(\alpha\beta)} - F_\mu F_\nu].$$

Assim como visto no caso anterior a geometria aqui é alterada e depende da distribuição de energia do campo $F_{\alpha\beta\mu}$.

1.9 A interação matéria-gravidade

A forte evidência de que a matéria se acopla universalmente a gravidade torna possível descrever essa interação como se a matéria estivesse mergulhada numa geometria riemanniana produzida pelo campo gravitacional. Muitos autores [4, 6] têm mostrado que esta geometria pode ser escrita em termos de uma geometria de fundo $\gamma_{\mu\nu}$ e do campo gravitacional através do potencial $\phi_{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}. \tag{1.51}$$

Para se saber como a matéria se acopla a gravidade deve-se substituir a geometria de fundo $\gamma_{\mu\nu}$ pela geometria efetiva $g_{\mu\nu}$ e as derivadas por derivadas covariantes construídas com $g_{\mu\nu}$.

Assim pode-se obter a modificação da equação de movimento do campo gravitacional na presença de matéria. O campo gravitacional deve sentir a matéria somente pela combinação $g_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$, logo

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Deste modo a equação geral de movimento do campo gravitacional que possui os termos de fonte é

$$\{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda} = -T_{\mu\nu} \tag{1.52}$$

ou

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = L_A^{-1}\{L_{A;\lambda} F^{\lambda}_{(\mu\nu)} + T_{\mu\nu}\} \tag{1.53}$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da matéria.

A interação matéria-gravidade proposta pela teoria NDL é indistinguível da relatividade geral.

Capítulo 2

Solução em NDL para uma métrica estática e esfericamente simétrica

Neste capítulo apresenta-se a soluçao para as equações da teoria NDL para uma configuração estática e com simetria esférica [6].

Vale ressaltar que esta teoria admite o príncipio de equivalência de Einstein para todo tipo de matéria, mas discorda da hipótese acerca da universalidade da interação gravitacional.

2.1 Solução estática e esfericamente simétrica: solução de vácuo

Na teoria NDL o campo gravitacional propaga-se numa geometria de Minkowski e obedece a equação de movimento

$$\{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda} = -T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

ou

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = L_A^{-1}\{L_{A;\lambda} F^{\lambda}_{(\mu\nu)} + T_{\mu\nu}\}. \tag{2.2}$$

Na teoria da relatividade geral a correspondente equação de movimento do campo gravitacional na representação geométrica toma a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

em que a curvatura associada a métrica riemanniana aparece explicitamente.

Muitos autores [4, 6] mostraram ser possível reescrever as equações de movimento de Einstein isolando o operador linear $G^{(L)}_{\mu\nu}$ dos termos não lineares

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} - \mathscr{T}_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

em que $\mathscr{T}_{\mu\nu}$ é uma complicada expressão não linear construída com o tensor métrico e suas derivadas.

Através de uma simples inspeção das duas teorias observa-se claramente a particular caracterização da interação gravidade-gravidade em cada teoria, deve-se também enfatizar que as equações (2.1) e (2.2) não possuem nenhum tipo de aproximação ou seja, são exatas.

Desde que ambas as teorias respeitem o princípio de equivalência fraco, o comportamento da matéria (ou qualquer forma de energia não gravitacional) é precisamente a mesma nas duas teorias. Somente a interação gravidade-gravidade é distinta entre elas.

Procura-se agora a solução da equação de movimento (2.1) no vácuo, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$. Para isso considera-se a métrica

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{2.5}$$

Substituindo $\gamma_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$ obtem-se a métrica na forma

$$ds^2 = [1 + \mu(r)]dt^2 - [1 + \nu(r)]dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{2.6}$$

As quantidades não nulas são:

$$\phi_{00} = \phi^{00} = \mu(r), \quad \phi_{11} = \phi^{11} = -\nu(r)$$

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{11} = -1, \quad \gamma_{22} = -r^2, \quad \gamma_{33} = -r^2 sen^2\theta$$

$$\gamma^{00} = 1, \quad \gamma^{11} = -1, \quad \gamma^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad \gamma_{33} = -\frac{1}{r^2 sen^2\theta}.$$

Utilizando estas quantidades na equação para o traço (1.6), com a ajuda de (1.1) e (1.2), obtem-se

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= \phi_{;\alpha} - \phi_{\alpha\mu;\nu}\gamma^{\mu\nu} \\
&= (\phi_{00}\gamma^{00} + \phi_{11}\gamma^{11})_{,\alpha} - (\phi_{\alpha\mu,\nu} - \Delta^\sigma_{\mu\nu}\phi_{\sigma\alpha} - \Delta^\sigma_{\alpha\nu}\phi_{\sigma\mu})\gamma^{\mu\nu} \\
&= (\phi_{00}\gamma^{00} + \phi_{11}\gamma^{11})_{,\alpha} - \phi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\
&+ (\Delta^\alpha_{00}\gamma^{00} + \Delta^\alpha_{11}\gamma^{11} + \Delta^\alpha_{22}\gamma^{22} + \Delta^\alpha_{33}\gamma^{33})\phi_{\alpha\alpha} \\
&= (\phi_{00}\gamma^{00} + \phi_{11}\gamma^{11})_{,\alpha} - \phi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\
&+ \left[\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\sigma}(2\gamma_{\alpha2,2} - \gamma_{22,\alpha})\gamma^{22} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\sigma}(2\gamma_{\alpha3,3} - \gamma_{33,\alpha})\gamma^{33}\right]\phi_{\alpha\alpha} \\
&= (\phi_{00} - \phi_{11})_{,\alpha} - \phi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}[(2\gamma_{\alpha2,2} - \gamma_{22,\alpha})\gamma^{22} + (2\gamma_{\alpha3,3} - \gamma_{33,\alpha})\gamma^{33}]\phi_{\alpha\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Para os valores de $\alpha = 0,\, 2,\, 3$ tem-se que,

$$F_0 = F_2 = F_3 = 0, \tag{2.8}$$

e para $\alpha = 1$

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (\phi_{00} - \phi_{11})_{,1} - \phi_{11,1}\gamma^{11} + \frac{1}{2}\gamma^{11}(-\gamma_{22,1}\gamma^{22} - \gamma_{33,1}\gamma^{33})\phi_{11} \\
&= F_1 = \mu' - (-\nu') - (-\nu')(-1) \\
&+ \frac{1}{2}(-1)\left[-(-2r)\left(-\frac{1}{r^2}\right) - (-2rsen^2\theta)\left(-\frac{1}{r^2sen^2\theta}\right)\right](-\nu) \\
&= \mu' - \frac{2\nu}{r} \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

onde (') representa a derivada em relação a r.

Utilizando os valores de F_α e as equações (1.3) e (1.4), passa-se ao cálculo do campo gravitacional $F_{\alpha\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\phi_{\nu[\alpha;\mu]} + F_{[\alpha}\gamma_{\mu]\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha;\mu} - \phi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\phi_{\nu\alpha,\mu} - \Delta^\sigma_{\nu\mu}\phi_{\sigma\alpha} - \Delta^\sigma_{\alpha\mu}\phi_{\sigma\nu} - \phi_{\nu\mu,\alpha} \\
&+ \Delta^\sigma_{\nu\alpha}\phi_{\sigma\mu} + \Delta^\sigma_{\mu\alpha}\phi_{\sigma\nu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\phi_{\nu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\gamma_{\beta\nu,\mu} + \gamma_{\beta\mu,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\beta})\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\nu\mu,\alpha}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\mu\beta}(\gamma_{\beta\nu,\alpha} + \gamma_{\beta\alpha,\nu} - \gamma_{\nu\alpha,\beta})\phi_{\mu\mu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right] \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2}\big[\phi_{\nu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}(\gamma_{\alpha\nu,\mu} + \gamma_{\alpha\mu,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha})\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\nu\mu,\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\mu\mu}(\gamma_{\mu\nu,\alpha} + \gamma_{\mu\alpha,\nu} - \gamma_{\nu\alpha,\mu})\phi_{\mu\mu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\big]. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Devido a antissimetria nos dois primeiros índices de $F_{\alpha\mu\nu}$ as possibilidades independentes para α, μ e ν são:

000	010	020	030	110	120	130	220	230	330
001	011	021	031	111	121	131	221	231	331
002	012	022	032	112	122	132	222	232	332
003	013	023	033	113	123	133	223	233	333

Da definição de $F_{\alpha\mu\nu}$ pode-se eliminar algumas possibilidades, ou seja, são nulas as componentes com os três índices iguais, $F_{\alpha\alpha\alpha} \equiv 0$, e para $\mu \neq \nu$ tem-se que $\phi_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} = 0$, logo segue que também são nulas as componentes que possuem os três índices distintos entre si. Assim as possibilidades restantes são:

010	020	030	110	220	330
001	011	121	131	221	331
002	022	112	122	232	332
003	033	113	133	223	233

Com o apoio das equações (2.8), (2.9) e com os valores de $\phi_{\mu\nu}$ e $\gamma_{\mu\nu}$ passa-se a inspeção direta da equação (2.11).

Para $\alpha = \mu = 0, \qquad F_{00\nu} = 0.$

Para $\alpha = \mu = 1, \qquad F_{11\nu} = 0.$

Para $\alpha = \mu = 2, \qquad F_{22\nu} = 0.$

Para $\alpha = \mu = 3, \qquad F_{33\nu} = 0.$

Para $\mu = \nu = 0$, $\quad F_{\alpha 00} = \frac{1}{2}(-\phi_{00,\alpha} + F_\alpha)$.

$$\begin{aligned} F_{100} &= \frac{1}{2}\left(-\mu' + \mu' - \frac{2\nu}{r}\right) \\ &= -\frac{\nu}{r} \end{aligned} \tag{2.12}$$

e $\quad F_{200} = F_{300} = 0$.

Para $\mu = \nu = 1$, $\quad F_{\alpha 11} = 0$.

Para $\mu = \nu = 2$, $\quad F_{\alpha 22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{22,\alpha}\phi_{\alpha\alpha} + F_\alpha\gamma_{22}\right)$.

$$\begin{aligned} F_{122} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-1)(-2r)(-\nu) + \left(\mu' - \frac{2\nu}{r}\right)(-r^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) \end{aligned} \tag{2.13}$$

e $\quad F_{022} = F_{322} = 0$.

Para $\mu = \nu = 3$, $\quad F_{\alpha 33} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{33,\alpha}\phi_{\alpha\alpha} + F_\alpha\gamma_{33}\right)$.

$$\begin{aligned} F_{133} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-1)(-2r sen^2\theta)(-\nu) + \left(\mu' - \frac{2\nu}{r}\right)(-r^2 sen^2\theta)\right] \\ &= sen^2\theta \quad \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ou

$$F_{133} = sen^2\theta F_{122}$$

e $\quad F_{033} = F_{233} = 0.$

Logo o campo gravitacional $F_{\alpha\mu\nu}$ esta determinado e os termos não nulos, a menos da antissimetria $F_{\alpha\mu\nu} = -F_{\mu\alpha\nu}$, são

$$F_{100} = -\frac{\nu}{r} \tag{2.15}$$

$$F_{122} = \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) \tag{2.16}$$

$$F_{133} = sen^2\theta F_{122} \tag{2.17}$$

Passa-se agora ao cálculo dos invariantes $A \equiv F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu}$ e $B \equiv F_\mu F^\mu$

$$\begin{aligned}
A &= F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu} \\
&= F_{\alpha\mu\nu}F_{\beta\rho\sigma}\gamma^{\beta\alpha}\gamma^{\rho\mu}\gamma^{\sigma\nu} \\
&= F_{010}F_{010}\gamma^{00}\gamma^{11}\gamma^{00} + F_{100}F_{100}\gamma^{11}\gamma^{00}\gamma^{00} \\
&+ F_{212}F_{212}\gamma^{22}\gamma^{11}\gamma^{22} + F_{122}F_{122}\gamma^{11}\gamma^{22}\gamma^{22} \\
&+ F_{313}F_{313}\gamma^{33}\gamma^{11}\gamma^{33} + F_{133}F_{133}\gamma^{11}\gamma^{33}\gamma^{33} \\
&= 2\gamma^{11}[(F_{100}\gamma^{00})^2 + (F_{122}\gamma^{22})^2 + (F_{133}\gamma^{33})^2] \\
&= -2\Bigg\{ \left(-\frac{\nu}{r}\right)^2 + \left[\frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]^2 \\
&+ \left[sen^2\theta \quad \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2)\left(-\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\right)\right]^2 \Bigg\} \\
&= -3\frac{\nu^2}{r^2} - \mu'^2 + 2\frac{\nu\mu'}{r} \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
B &= F_\alpha F^\alpha \\
&= F_\alpha F_\mu \gamma^{\mu\alpha} \\
&= F_1 F_1 \gamma^{11} \\
&= -\left(\mu\text{'} - 2\frac{\nu}{r}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{r^2}(\mu\text{'}r - 2\nu)^2. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Reescreve-se a Lagrangiana (1.40) na forma

$$
\begin{aligned}
L &= L(A, B) \\
&= \frac{1}{k}\{\sqrt{b^4 + b^2(-A + B)} - b^2\} \\
&= \frac{b^2}{k}\left[\sqrt{1 + \frac{(-A + B)}{b^2}} - 1\right]. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Agora deriva-se a lagrangiana em relação ao invariante A, obtendo

$$
L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{(-A + B)}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.. \qquad (2.21)
$$

Substituindo (2.18) e (2.19) em (2.21)

$$
L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{b^2}\left(3\frac{\nu^2}{r^2} + \mu\text{'}^2 - 2\frac{\nu\mu\text{'}}{r} - \frac{1}{r^2}(\mu\text{'}r - 2\nu)^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}
$$

$$
L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{b^2}\left(2\frac{\nu\mu\text{'}}{r} - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.22)
$$

Como L_A depende apenas de r pode-se escrever a equação de movimento

$$
\{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda} = 0
$$

ou seja

$$L_{A,\lambda}F^{\lambda}_{(\mu\nu)} + L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} = 0$$

que é escrita como

$$L_{A,1}F^{1}_{(\mu\nu)} + L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} = 0. \tag{2.23}$$

O desenvolvimento de $F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda}$ é tal que:

$$\begin{aligned}
F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} &= F_{\lambda(\mu\nu);\lambda}\gamma^{\alpha\lambda} \\
&= (F_{\lambda\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\nu\mu);\lambda})\gamma^{\lambda\lambda} \\
&= \gamma^{\lambda\lambda}F_{\lambda\mu\nu,\lambda} - \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma})F_{\sigma\mu\nu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma})F_{\lambda\sigma\nu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma})F_{\sigma\mu\sigma} \\
&+ \gamma^{\lambda\lambda}F_{\lambda\nu\mu,\lambda} - \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma})F_{\sigma\nu\mu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\lambda\nu,\sigma})F_{\lambda\sigma\mu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\mu\lambda,\sigma})F_{\lambda\nu\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Agrupando os termos de (2.24),

$$\begin{aligned}
F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} &= \gamma^{\lambda\lambda}(F_{\lambda\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\nu\mu),\lambda}) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma})(F_{\sigma\mu\nu} + F_{\sigma\nu\mu}) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma})(F_{\lambda\sigma\nu} + F_{\lambda\nu\sigma}) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma})(F_{\lambda\mu\sigma} + F_{\lambda\sigma\mu})
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ou

$$
\begin{aligned}
F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} &= \gamma^{\lambda\lambda}\{(F_{\lambda\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\nu\mu,\lambda}) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\sigma}[(2\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma})(F_{\sigma\mu\nu} + F_{\sigma\nu\mu}) \\
&+ (\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma})(F_{\lambda\sigma\nu} + F_{\lambda\nu\sigma}) \\
&+ (\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma})(F_{\lambda\mu\sigma} + F_{\lambda\sigma\mu})]\}. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

As quantidades identicamente nula, por inspeção direta da equação (2.26) são:

$$
\begin{array}{cccccc}
F^{\lambda}_{(01);\lambda} & F^{\lambda}_{(02);\lambda} & F^{\lambda}_{(03);\lambda} & F^{\lambda}_{(10);\lambda} & F^{\lambda}_{(12);\lambda} & F^{\lambda}_{(13);\lambda} \\
F^{\lambda}_{(20);\lambda} & F^{\lambda}_{(21);\lambda} & F^{\lambda}_{(23);\lambda} & F^{\lambda}_{(30);\lambda} & F^{\lambda}_{(31);\lambda} & F^{\lambda}_{(32);\lambda}
\end{array}
$$

As quantidades restantes são dadas por:

$$F^{\lambda}_{(00);\lambda} = \gamma^{11}[2F_{100,1} + F_{100}(\gamma^{22}\gamma_{22,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1})] \qquad (2.27)$$

$$F^{\lambda}_{(11);\lambda} = \gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133} \qquad (2.28)$$

$$F^{\lambda}_{(22);\lambda} = \gamma^{11}(2F_{122,1} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{122}) \qquad (2.29)$$

$$F^{\lambda}_{(33);\lambda} = \gamma^{11}(2F_{133,1} - 2\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133}) \qquad (2.30)$$

Verificando o primeiro termo de (2.23) tem-se

$$
\begin{aligned}
F^1_{(\mu\nu)} &= F_{\alpha(\mu\nu)}\gamma^{\alpha 1} \\
&= F_{1(\mu\nu)}\gamma^{11} \\
&= -(F_{1\mu\nu} + F_{1\nu\mu})
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Logo as quantidades não nulas da equação anterior são

$$F^1_{(00)} = -2F_{100} \tag{2.32}$$

$$F^1_{(22)} = -2F_{122} \tag{2.33}$$

$$F^1_{(33)} = -2F_{133} \tag{2.34}$$

Portanto tem-se agora as equações não nulas extraídas da equação (2.23):

$$L_A\gamma^{11}[2F_{100,1} + F_{100}(\gamma^{22}\gamma_{22,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1})] - 2L_{A,1}F_{100} = 0 \tag{2.35}$$

$$L_A(\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133}) = 0 \tag{2.36}$$

$$L_A\gamma^{11}(2F_{122,1} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{122}) - 2L_{A,1}F_{122} = 0 \tag{2.37}$$

$$L_A\gamma^{11}(2F_{133,1} - 2\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133}) - 2L_{A,1}F_{133} = 0 \tag{2.38}$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.17) e as quantidades, γ^{22}, γ^{33}, $\gamma_{22,1}$ e $\gamma_{33,1}$ em (2.36) obtem-se

$$L_A\frac{4}{r^3}F_{122} = 0 \tag{2.39}$$

Como L_A é diferente de 0, tem-se que

$$F_{122} = 0 \tag{2.40}$$

ou seja

$$\frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) = 0$$

$$\nu = \mu' r. \tag{2.41}$$

Com o resultado (2.40), tornam-se nulas as equações (2.37) e (2.38). Antes de utilizar a equação (2.35), substitui-se o resultado (2.41) na lagrangiana derivada em relação a A (L_A), ou seja, μ' por $\frac{\nu}{r}$

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{b^2}\left(2\frac{\nu\mu'}{r} - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

que produz

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{\nu^2}{r^2 b^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

Derivando L_A em relação a r

$$L_{A,1} = -\frac{1}{4k}\left[1 + \frac{\nu^2}{r^2 b^2}\right]^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{2\nu\nu' r^{-2} - 2r^{-3}\nu^2}{b^2}\right]. \tag{2.43}$$

Substituindo (2.42) e (2.43) na equação (2.35) obtem-se

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2k}\left[1+\frac{\nu^2}{r^2b^2}\right]^{-\frac{1}{2}}[2r^{-2}\nu+2\nu\text{'}r^{-1}] \\
&+ \frac{1}{4k}\left[1+\frac{\nu^2}{r^2b^2}\right]^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{2\nu\nu\text{'}r^{-2}-2r^{-3}\nu^2}{b^2}\right]\frac{2\nu}{r}
\end{aligned}
$$

que ao simplificar gera

$$
2\nu^3+b^2r^2\nu+b^2\nu\text{'}r^3=0. \tag{2.44}
$$

Logo a busca pela solução da equação de movimento,

$$
\{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda}=0
$$

reduziu-se a resolver somente duas equações, que estão reproduzidas abaixo:

$$
\begin{cases}
2\nu^3+b^2r^2\nu+b^2\nu\text{'}r^3=0 \\
\mu\text{'}r-\nu=0
\end{cases}
$$

A primeira equação tem a forma da equação de Bernoulli, cuja forma geral é dada por

$$
\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,
$$

que pode ser transformada numa equação diferencial linear de 1ª ordem,

$$
\frac{dz}{dx}+R(x)z=S(x).
$$

A última equação tem como solução

$$z = e^{-\int R dx}\left[\int S e^{\int R dx} dx + cte\right]$$

logo a solução da equação de Bernoulli é

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}.$$

Portanto, escrevendo a equação (2.44) da forma

$$\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\nu = \frac{2}{b^2 r^3}\nu^3, \tag{2.45}$$

e transformando-a numa equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dz}{dr} - \frac{2}{r}z = \frac{4}{b^2 r^3} \tag{2.46}$$

segue que

$$z = r^2\left[\frac{4}{b^2}\left(c - \frac{1}{4}r^{-4}\right)\right] \tag{2.47}$$

e

$$\nu = \left[\frac{4r^2}{b^2}\left(c - \frac{1}{4}r^{-4}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.48}$$

onde c é uma constante e é igual a

$$c = \frac{C^{-2}b^2}{4}.$$

Fazendo

$$r_0^2 = \frac{C}{|b|}, \tag{2.49}$$

a equação (2.48) torna-se

$$\nu = \frac{|C|}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.50}$$

Da equação (2.41) segue que

$$\mu' r - \nu = 0$$

$$\mu = \int \frac{\nu}{r} dr + c_1 \tag{2.51}$$

A função $\nu(r)$ é definida somente para $r \geq r_0$, e seja c_1 uma constante, substituindo a equação (2.50) em (2.51), pode-se escrever

$$\mu(r) = |C| \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^4 - r_0^4}} + c_1. \tag{2.52}$$

Esta integral pode ser escrita em termos de uma integral elíptica,

$$\mu(r) = |C| \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - r_0^2)(r^2 + r_0^2)}} + c_1. \tag{2.53}$$

cujo o resultado da forma geral pode ser escrito em termos de uma integral elíptica F de primeira espécie

$$\int_{\beta}^{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \beta_0^2)(x^2 + \alpha_0^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} F(X, Y) \tag{2.54}$$

válida para $\mu > \beta > 0$ e

$$X = arcos\left(\frac{\beta}{\mu}\right),$$

$$Y = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}.$$

Para nosso caso $r > r_0 > 0$,

$$X = arcos\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$Y = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+r_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo a equação (2.53) é dada por:

$$\mu(r) = \frac{|C|}{\sqrt{2}r_0}F\left[arcos\left(\frac{r_0}{r}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + c_1. \tag{2.55}$$

Para determinar o valor da constante c_1, impõe-se que para r grande o espaço torna-se de Minkowski, o que leva $\mu(r)$ tender a zero, então,

$$c_1 = -\frac{|C|}{\sqrt{2}r_0}F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.56}$$

e

$$\mu(r) = \frac{|C|}{\sqrt{2}r_0}\left\{F\left[arcos\left(\frac{r_0}{r}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}. \tag{2.57}$$

O valor da constante C é determinado pela solução no limite de campo fraco, que deve coincidir com a solução de Schwarszchild. A componente radial da métrica de Schwarszchild (com G = c = 1) é

$$g_{11} = -1 - \frac{2M}{r}. \tag{2.58}$$

Para este caso

$$g_{11}(r) = -1 - \frac{|C|}{r}, \tag{2.59}$$

logo por comparação entre (2.58) e (2.59)

$$|C| = 2M. \tag{2.60}$$

Deste modo, pode-se agora escrever a expressão geral dada pela métrica para o espaço estático, esfericamente simétrico e assintoticamente plano na teoria NDL, ou seja

$$ds^2 = [1 + \mu(r)]dt^2 - [1 + \nu(r)]dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{2.61}$$

em que,

$$\nu(r) = \frac{2M}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.62}$$

e

$$\mu(r) = \frac{2M}{\sqrt{2}r_0}\left\{F\left[arcos\left(\frac{r_0}{r}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}. \tag{2.63}$$

Capítulo 3

O teorema de Birkhoff

Neste capítulo vamos verificar se o teorema de Birkhoff que é válido na relatividade geral e afirma que toda solução de vácuo das equações de Einstein esfericamente simétrica é necessariamente estática, também é válido para a teoria NDL apesar do fato de não haver solução de Schwarzschild nesta teoria.

3.1 A solução não estática e esfericamente simétrica: solução de vácuo

Consideraremos novamente aqui uma região de vácuo exterior a uma configuração esfericamente simétrica na teoria NDL, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$. A métrica (2.5) passa a ser para este caso dada por

$$ds^2 = [1 + \mu(r,t)]dt^2 - [1 + \nu(r,t)]dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{3.1}$$

As quantidades não nulas são

$$\phi_{00} = \phi^{00} = \mu(r,t), \quad \phi_{11} = \phi^{11} = -\nu(r,t)$$

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{11} = -1, \quad \gamma_{22} = -r^2, \quad \gamma_{33} = -r^2 sen^2\theta$$

$$\gamma^{00} = 1, \quad \gamma^{11} = -1, \quad \gamma^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad \gamma_{33} = -\frac{1}{r^2 sen^2\theta}.$$

O traço F_α é dado pela equação,

$$\begin{aligned} F_\alpha &= (\phi_{00} - \phi_{11})_{,\alpha} - \phi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}[(2\gamma_{\alpha 2,2} - \gamma_{22,\alpha})\gamma^{22} + (2\gamma_{\alpha 3,3} - \gamma_{33,\alpha})\gamma^{33}]\phi_{\alpha\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para $\alpha = 2, 3$ temos

$$F_2 = F_3 = 0. \tag{3.3}$$

Para $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= (\phi_{00} - \phi_{11})_{,0} - \phi_{00,0}\gamma^{00} \\ &= \phi_{00,0} - \phi_{11,0}) - \phi_{00,0} \\ &= \dot{\nu} \end{aligned} \tag{3.4}$$

e para $\alpha = 1$

$$F_1 = \mu' - \frac{2\nu}{r}, \tag{3.5}$$

onde (.) representa a derivada em relação a t e (') representa a derivada em relação a r.

Obtido os valores de F_α passamos ao cálculo do campo gravitacional $F_{\alpha\mu\nu}$ que é

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2}\big[\phi_{\nu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}(\gamma_{\alpha\nu,\mu} + \gamma_{\alpha\mu,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha})\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\nu\mu,\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\mu\mu}(\gamma_{\mu\nu,\alpha} + \gamma_{\mu\alpha,\nu} - \gamma_{\nu\alpha,\mu})\phi_{\mu\mu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\big]. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Os mesmos argumentos utilizados no capítulo anterior continuam válidos e as possibilidades possíveis continuam sendo as mesmas. Novamente por inspeção direta da equação do campo gravitacional temos:

Para $\alpha = \mu = 0$, $\quad F_{00\nu} = 0.$

Para $\alpha = \mu = 1$, $\quad F_{11\nu} = 0.$

Para $\alpha = \mu = 2$, $\quad F_{22\nu} = 0.$

Para $\alpha = \mu = 3$, $\quad F_{33\nu} = 0.$

Para $\mu = \nu = 0$, $\quad F_{\alpha 00} = \frac{1}{2}(-\phi_{00,\alpha} + F_\alpha).$

$$
\begin{aligned}
F_{100} &= \frac{1}{2}\left(-\mu' + \mu' - \frac{2\nu}{r}\right) \\
&= -\frac{\nu}{r} \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

e $\quad F_{200} = F_{300} = 0.$

Para $\mu = \nu = 1$, $\quad F_{\alpha 11} = \frac{1}{2}(\phi_{1\alpha,1} - \phi_{11,\alpha} + F_\alpha\gamma_{11} - F_1\gamma_{\alpha 1})$,logo

$$\begin{aligned} F_{011} &= \frac{1}{2}(-\phi_{11,0} + F_0\gamma_{11}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e $\quad F_{211} = F_{311} = 0.$

Para $\mu = \nu = 2, \quad F_{\alpha 22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{22,\alpha}\phi_{\alpha\alpha} + F_\alpha\gamma_{22}\right)$, logo

$$\begin{aligned} F_{022} &= \frac{1}{2}F_0\gamma 22 \\ &= -\frac{\dot{\nu}r^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$F_{122} = \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) \tag{3.9}$$

e $F_{322} = 0.$

Para $\mu = \nu = 3, \quad F_{\alpha 33} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{33,\alpha}\phi_{\alpha\alpha} + F_\alpha\gamma_{33}\right)$, logo,

$$\begin{aligned} F_{033} &= \frac{1}{2}F_0\gamma_{33} \\ &= -sen^2\varphi\frac{\dot{\nu}r^2}{2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

ou

$$F_{033} = sen^2\varphi F_{022},$$

$$F_{133} = sen^2\theta \quad \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) \tag{3.11}$$

ou

$$F_{133} = sen^2\theta F_{122}$$

e $\quad F_{233} = 0.$

Logo as únicas componentes para campo gravitacional, a menos da antissimetria $F_{\alpha\mu\nu} = -F_{\mu\alpha\nu}$, são:

$$F_{100} = -\frac{\nu}{r} \tag{3.12}$$

$$F_{022} = -\frac{\dot{\nu}r^2}{2} \tag{3.13}$$

$$F_{122} = \frac{1}{2}(\nu r - \mu' r^2) \tag{3.14}$$

$$F_{033} = sen^2\varphi F_{022} \tag{3.15}$$

$$F_{133} = sen^2\theta F_{122} \tag{3.16}$$

Portanto com as quantidades $F_{\alpha\mu\nu}$ e F_α obtidas vamos calcular novamente os invariantes $A \equiv F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu}$ e $B \equiv F_\alpha F^\alpha$

$$
\begin{aligned}
A &= F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu} \\
&= F_{\alpha\mu\nu}F_{\beta\rho\sigma}\gamma^{\beta\alpha}\gamma^{\rho\mu}\gamma^{\sigma\nu} \\
&= F_{010}F_{010}\gamma^{00}\gamma^{11}\gamma^{00} + F_{100}F_{100}\gamma^{11}\gamma^{00}\gamma^{00} \\
&+ F_{022}F_{022}\gamma^{00}\gamma^{22}\gamma^{22} + F_{202}F_{202}\gamma^{22}\gamma^{00}\gamma^{22} \\
&+ F_{212}F_{212}\gamma^{22}\gamma^{11}\gamma^{22} + F_{122}F_{122}\gamma^{11}\gamma^{22}\gamma^{22} \\
&+ F_{033}F_{033}\gamma^{00}\gamma^{33}\gamma^{33} + F_{303}F_{303}\gamma^{33}\gamma^{00}\gamma^{33} \\
&+ F_{313}F_{313}\gamma^{33}\gamma^{11}\gamma^{33} + F_{133}F_{133}\gamma^{11}\gamma^{33}\gamma^{33} \\
&= 2[(F_{100}\gamma^{00})^2\gamma^{11} + (F_{022}\gamma^{22})^2\gamma^{00} + (F_{122}\gamma^{22})^2\gamma^{11} \\
&+ (F_{033}\gamma^{33})^2\gamma^{00} + (F_{133}\gamma^{33})^2\gamma^{11}] \\
&= 2\{\gamma^{11}[(F_{100}\gamma^{00})^2 + (F_{122}\gamma^{22})^2 + (F_{133}\gamma^{33})^2] \\
&+ \gamma^{00}[(F_{022}\gamma^{22})^2 + (F_{033}\gamma^{33})^2]\} \\
&= 2\Bigg\{ - \Bigg[\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\nu r - \mu' r^2}{r^2}\right)^2 + \left(sen^2\theta \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\nu r - \mu' r^2}{r^2 sen^2\theta}\right)\right)^2\Bigg] \\
&+ \Bigg[\left(\frac{\dot{\nu} r^2}{2}\frac{1}{r^2}\right)^2 + \left(sen^2\theta \quad \frac{\dot{\nu} r^2}{2}\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\right)^2\Bigg]\Bigg\} \\
&= -\frac{3\nu^2}{r^2} - (\mu')^2 + \frac{2\nu\mu'}{r} + (\dot{\nu})^2
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

e para o invariante B

$$
\begin{aligned}
B &= F_\alpha F^\alpha \\
&= F_\alpha F_\mu \gamma^{\mu\alpha} \\
&= F_0F_0\gamma^{00} + F_1F_1\gamma^{11} \\
&= (\dot{\nu})^2 - \left(\mu' - \frac{2\nu}{r}\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Fazendo a subtração dos invariantes obtemos

$$
A - B = \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{2\nu\mu'}{r}. \tag{3.19}
$$

A Lagrangiana é dada pela expressão (2.20) e sua derivada em relação ao invariante A é dado pela equação (2.21). Substituindo (3.19) em (2.21) obtemos

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{b^2}\left(2\frac{\nu\mu'}{r} - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

que é identica a obtida no capítulo anterior.

Deste modo passamos ao cálculo da equação de movimento, lembrando que L_A depende de r e t,

$$\{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda} = 0$$

$$\begin{aligned} \{L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu)}\}_{;\lambda} &= L_{A,\lambda} F^{\lambda}_{(\mu\nu)} + L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} \\ &= L_{A,0} F^{0}_{(\mu\nu)} + L_{A,1} F^{1}_{(\mu\nu)} + L_A F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

O termo $F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda}$ da equação anterior é o mesmo da equação (2.26) e é dado por:

$$\begin{aligned} F^{\lambda}_{(\mu\nu);\lambda} &= \gamma^{\lambda\lambda}\{(F_{\lambda\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\nu\mu,\lambda}) \\ &- \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\sigma}[(2\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma})(F_{\sigma\mu\nu} + F_{\sigma\nu\mu}) \\ &+ (\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma})(F_{\lambda\sigma\nu} + F_{\lambda\nu\sigma}) \\ &+ (\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma})(F_{\lambda\mu\sigma} + F_{\lambda\sigma\mu})]\}. \end{aligned}$$

Por verificação desta equação as quantidades nulas são:

$$F^{\lambda}_{(02);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(03);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(12);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(13);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(20);\lambda}$$

$$F^{\lambda}_{(21);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(23);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(30);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(31);\lambda} \qquad F^{\lambda}_{(32);\lambda}$$

e as quantidades restantes são dadas por:

$$F^{\lambda}_{(00);\lambda} = 2\gamma^{11}F_{100,1} + F_{100}\gamma^{11}(\gamma^{22}\gamma_{22,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1})] \tag{3.21}$$

$$F^{\lambda}_{(01);\lambda} = \gamma^{00}F_{010,1} + \frac{1}{2}[\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{022} + \gamma^{33}\gamma 33\gamma_{33,1}F_{033}] \tag{3.22}$$

$$F^{\lambda}_{(11);\lambda} = \gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133} \tag{3.23}$$

$$F^{\lambda}_{(22);\lambda} = 2\gamma^{00}F_{022,0} + \gamma^{11}[2F_{122,1} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{122}) \tag{3.24}$$

$$F^{\lambda}_{(33);\lambda} = 2\gamma^{00}F_{033,0} + \gamma^{11}[2F_{133,1} - 2\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133}] \tag{3.25}$$

O termo $F^{0}_{(\mu\nu)}$ de (3.20) pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} F^{0}_{(\mu\nu)} &= F_{\sigma(\mu\nu)}\gamma^{\sigma 0} \\ &= (F_{0\mu\nu} + F_{0\nu\mu})\gamma^{00} \end{aligned} \tag{3.26}$$

logo as quantidades diferentes de zero são

$$\begin{aligned} F^{0}_{01} &= F_{010} \\ &= -F_{100} \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$F^0_{22} = 2F_{022} \tag{3.28}$$

$$F^0_{33} = 2F_{033} \tag{3.29}$$

E para $F^1_{(\mu\nu)}$ são válidas as equações (2.32), (2.33) e (2.34).

Assim podemos escrever as equações que foram retiradas da equação de movimento (3.20),

$$L_A\gamma^{11}[2F_{100,1} + F_{100}(\gamma^{22}\gamma_{22,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1})] - 2L_{A,1}F_{100} = 0 \tag{3.30}$$

$$L_A[\gamma^{00}F_{010,0} + \frac{1}{2}(\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{022} + \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{033})] - L_{A,0}F_{100} = 0 \tag{3.31}$$

$$L_A[\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133}] = 0 \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} L_A[2\gamma^{00}F_{022,0} + \gamma^{11}(2F_{122,1} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{122})] \\ +2L_{A,0}F_{022} - 2L_{A,1}F_{122} = 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} L_A[2\gamma^{00}F_{033,0} + \gamma^{11}(2F_{133,1} - 2\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133})] \\ +2L_{A,0}F_{033} - 2L_{A,1}F_{133} = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

A equação (3.32) nos fornece que,

$$L_A\frac{4}{r^3}F_{122} = 0 \tag{3.35}$$

logo

$$F_{122} = 0 \tag{3.36}$$

ou seja

$$\nu - \mu' r = 0. \tag{3.37}$$

Com o resultado (3.37) a Lagrangiana derivada em relação ao invariante A é igual a equação (2.42) assim como a derivada em relação a r é igual a (2.43). Já a derivada em relação a t produz

$$L_{A,0} = \frac{1}{2}\frac{\nu\dot{\nu}}{kb^2r^2}\left[1 + \frac{\nu^2}{b^2r^2}\right]^{-\frac{3}{2}} \tag{3.38}$$

A equação (3.30) com suas devidas substituições tem como resultado

$$2\nu^3 + b^2r^2\nu + b^2r^3\nu' = 0, \tag{3.39}$$

a equação (3.31) toma a forma

$$\nu^2 + b^2r^2 = 0. \tag{3.40}$$

As equações (3.33) e (3.34) geram o mesmo resultado, ou seja,

$$\ddot{\nu}b^2r^2 + \ddot{\nu}\nu^2 - \nu\dot{\nu} = 0 \tag{3.41}$$

Portanto o cálculo reduziu-se a solucionar quatro equações:

$$\begin{cases} 2\nu^3 + b^2r^2\nu + b^2\nu' r^3 = 0 \\ \mu' r - \nu = 0 \\ \ddot{\nu} b^2 r^2 + \ddot{\nu}\nu^2 - \nu\dot{\nu} = 0 \\ \nu^2 + b^2 r^2 = 0 \end{cases}$$

Substituindo (3.40) em (3.41) obtemos

$$\nu\dot{\nu} = 0, \tag{3.42}$$

logo podemos concluir que a derivada de ν em relação a t é zero, portanto, ν só depende de r. Agora derivando a equação (3.37) em relação a t temos,

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial r \partial t} = 0 \tag{3.43}$$

cujo integral é $\mu(r,t) = h(r) + f(t)$. A equação (3.39) é uma equação de Bernoulli cujo resultado foi obtido no capítulo anterior e é dado por,

$$\nu = \frac{|C|}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.44}$$

onde $r_0^2 = \frac{C}{|b|}$ e C é uma constante de integração. Agora integrando a equação (3.37) nós temos

$$\mu(r,t) = \int \frac{\nu}{r} dr + f(t), \tag{3.45}$$

que também já foi calculado e tem como resultado

$$\mu(r,t) = \frac{|C|}{\sqrt{2}r_0} F\left[arcos\left(\frac{r_0}{r}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + f(t). \tag{3.46}$$

A função f(t) pode ser calculada quando tomamos que no limite de r grande a geometria tende ao espaço de Minkowski, que significa $\mu(r,t)$ tender a zero. Logo verificamos que f(t) não é uma função dependente de t mas sim uma constante de valor igual a,

$$f = -\frac{|C|}{\sqrt{2}r_0} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{3.47}$$

Neste caso concluimos que μ é função apenas de r:

$$\mu(r) = \frac{|C|}{\sqrt{2}r_0} \left\{ F\left[arcos\left(\frac{r_0}{r}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}. \tag{3.48}$$

Assim sendo, como ν e μ não dependem de t mas sim só da variável r, verificamos que o teorema de Birkhoff é válido para a teoria NDL da gravitação.

Capítulo 4

Conclusão

O objetivo principal desta dissertação, verificar a validade do teorema de Birkhoff na teoria NDL foi alcançado e verificamos que o teorema de Birkhoff é válido nesta teoria de tal forma que podemos enunciar o teorema da seguinte forma: Toda solução de vácuo das equações da teoria NDL esfericamente simetrica é necessariamente estática. Como ainda hoje não foram detectadas as ondas gravitacionais, toda e qualquer teoria existente deve ser testada para assim verificar sua coerência. A teoria NDL apesar de discordar da relatividade geral acerca da universalidade da interação gravitacional mostra-se muito coerente nos aspectos gerais, o que justifica a importância do estudo realizado aqui.

Referências Bibliográficas

[1] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory: Volume 1, Introduction* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1988).

[2] C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge Univ. Press, 1993).

[3] M. Novello, V. A. De Lorenci e L. R. de Freitas, *Annals of Physics* **254**, 83, (1997).

[4] M. Novello, S. E. P. Bergliaffa e K. E. Hibberd, *Int.J.Mod.Phys.* D**13**, 527-538 (2004).

[5] Richard P. Feynman, Fernando B. Morinigo, Willian G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley (1995).

[6] S. Deser, *Gen. Rel. Grav* **1**, 9, (1970).

[7] M. Born, *Nature* **132**, 282, (1933).

[8] M. Born, *Proc. Roy. Soc.* A **143**, 410, (1934)..

[9] M. Born e L. Infeld, *Nature* **133**, 63, (1934).

[10] M. Fierz, *Helv. Phys.* Acta **29**, 128, (1956)..

[11] M. Fierz e W. Pauli, *Proc. Roy. Soc.* A **173**, 211, (1939).

[12] I. Gradshtein e I. Rizhik, *Table of Integrals, Sums, Series and Products*, (1962).

[13] S. N. Gupta, *Phys. Rev.* **96**, 1683, (1954).

[14] R. H. Kraichnan, *Phys. Rev.* **98**, 1118, (1955).

[15] R. H. Kraichnan, *Phys. Rev.* **101**, 482, (1956).

[16] S. Weinberg, *Phys. Lett.* **9**, 357, (1964).

[17] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **135**, B1049, (1964)..

[18] Sean M. Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley (2004).

[19] James B. Hartle, *Gravity an Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley (2003).

[20] Ryder, L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (1985).

[21] P. Ramond, *Field Theory*, Addison-Wesley (1989).

[22] d'Inverno, R. A., *Introducing Einstein's relativity*, Oxford University Press, (1998).